ÁLGEBRA LINEAR

Série Bibliográfica Unit

Marcos José Bastos Figueirêdo

Álgebra Linear

Apresentação

Prezado(a) estudante,

A modernidade anda cada vez mais atrelada ao tempo, e a educação não pode ficar para trás. Prova disso são as nossas disciplinas on-line, que possibilitam a você estudar com o maior conforto e comodidade possível, sem perder a qualidade do conteúdo.

Por meio do nosso programa de disciplinas on-line você pode ter acesso ao conhecimento de forma rápida, prática e eficiente, como deve ser a sua forma de comunicação e interação com o mundo na modernidade. Fóruns on-line, chats, podcasts, livespace, vídeos, MSN, tudo é válido para o seu aprendizado.

Mesmo com tantas opções, a Universidade Tiradentes optou por criar a coleção de livros Série Bibliográfica Unit como mais uma opção de acesso ao conhecimento. Escrita por nossos professores, a obra contém todo o conteúdo da disciplina que você está cursando na modalidade EAD e representa, sobretudo, a nossa preocupação em garantir o seu acesso ao conhecimento, onde quer que você esteja.

Desejo a você bom aprendizado e muito sucesso!

Professor Jouberto Uchôa de Mendonça

Reitor da Universidade Tiradentes

Sumário

Concepção da Disciplina

Ementa

Matrizes: introdução, conceitos, representação e aplicação de matrizes na computação; tipos de matrizes; operação com matrizes; matriz transposta e inversa. **Sistemas de Equações Lineares:** noções de determinantes; equação linear; métodos de resolução; sistemas equivalentes e homogêneos. **Espaços Vetoriais:** vetores; axiomas; combinação linear e subespaços vetoriais. **Transformações Lineares:** conceitos básicos; base e dimensão; dependência e independência linear; base e dimensão; espaço vetorial com produto interno.

Objetivos:

Geral

Levar ao aluno os conceitos básicos da Álgebra Linear, para obtenção do conhecimento necessário da sua aplicação como ferramenta no desenvolvimento de programas de computadores.

Específicos

- Dominar e aplicar os instrumentais da Álgebra Linear;
- Compreender a importância das técnicas instrumentais da Álgebra Linear;
- Utilizar os instrumentais da Álgebra Linear no desenvolvimento de Algoritmos Computacionais.

Orientação para Estudo

A disciplina propõe orientá-lo em seus procedimentos de estudo e na produção de trabalhos científicos, possibilitando que você desenvolva em seus trabalhos pesquisas, o rigor metodológico e o espírito crítico necessários ao estudo.

Tendo em vista que a experiência de estudar a distância é algo novo, é importante que você observe algumas orientações:

- Cuide do seu tempo de estudo! Defina um horário regular para acessar todo o conteúdo da sua disciplina disponível neste material impresso e no Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA). Organize-se de tal forma para que você possa dedicar tempo suficiente para leitura e reflexão;

- Esforce-se para alcançar os objetivos propostos na disciplina;

- Utilize-se dos recursos técnicos e humanos que estão ao seu dispor para buscar esclarecimentos e para aprofundar as suas reflexões. Estamos nos referindo ao contato permanente com o professor e com os colegas a partir dos fóruns, chats e encontros presenciais. Além dos recursos disponíveis no Ambiente Virtual de Aprendizagem – AVA.

Para que sua trajetória no curso ocorra de forma tranquila, você deve realizar as atividades propostas e estar sempre em contato com o professor, além de acessar o AVA.

Para se estudar num curso a distância deve-se ter a clareza que a área da Educação a Distância pauta-se na autonomia, responsabilidade, cooperação e colaboração por parte dos envolvidos, o que requer uma nova postura do aluno e uma nova forma de concepção de educação.

Por isso, você contará com o apoio das equipes pedagógica e técnica envolvidas na operacionalização do curso, além dos recursos tecnológicos que contribuirão na mediação entre você e o professor.

MATRIZES E SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES

Parte 1

1 Matrizes

Muitas vezes, na ciência e na Matemática, a informação é organizada em linhas e colunas formando agrupamentos retangulares chamados matrizes.

Estas matrizes podem ser tabelas de dados numéricos.

Por exemplo, nós veremos neste tema que, para resolver um sistema de equações tal como:

$$5x + y = 3$$

$$2x - y = 4$$

toda a informação requerida para chegar à matriz solução está incorporada na matriz

$$\begin{bmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

E que a solução pode ser obtida efetuando operações apropriadas nesta matriz. Isto é particularmente importante no desenvolvimento de programas de computador para resolver sistemas de equações lineares.

1.1 Conceitos básicos de matrizes

Uma matriz do tipo ***m*** x ***n*** é uma tabela de números dispostos em ***m*** linhas e ***n*** colunas.

Por exemplo, um volante da Mega-Sena é uma matriz 6 x 10. As dezenas estão dispostas em 6 linhas e 10 colunas.

As linhas de uma matriz são numeradas de cima para baixo, e as colunas da esquerda para a direita.

Veia:

		Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	Coluna 4
		↓	↓	↓	↓
Linha 1	→	2	3	4	5
Linha 2	→	- 1	4	0	3
Linha 3	→	6	- 2	4	0

APLICAÇÃO DE MATRIZES EM COMPUTAÇÃO

As matrizes são muito utilizadas na computação para aplicações da teoria dos grafos, computação gráfica, distribuição de temperatura de equilíbrio , tomografia computadorizada, criptografia, genética, para resolver sistemas de equações, etc.

REPRESENTAÇÃO DE MATRIZES

Os sinais ( ) e [ ] são usados como "molduras" das matrizes; as letras maiúsculas são usadas para dar nomes às matrizes e as letras minúsculas correspondentes representam seus elementos.

Exemplos:

$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 8 \end{bmatrix}$, matriz tipo 1x3 (1 linha e 3 colunas)

$B = \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$, matriz tipo 3x1 (3 linhas e 1 coluna)

$C = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, matriz tipo 2x2 (2 linhas e 2 colunas)

$D = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$, matriz tipo 2x3 (2 linhas e 3 colunas)

$E = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix}$, matriz tipo 3x2 (3 linhas e 2 colunas)

$F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \\ 1 & 8 & 27 \end{bmatrix}$, matriz tipo 3x3 (3 linhas e 3 colunas)

O símbolo a_{ij} representa o elemento da matriz A, que se encontra na linha ***i*** e na coluna ***j***.

Por exemplo, na matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 6 \\ 10 & 12 \\ 15 & 18 \end{bmatrix}$, tipo, ***3 x 2*** o elemento

a_{32} representa o elemento que se encontra na linha **3** e na coluna **2,** que é o **18**. Podemos, então, escrever:

$a_{11}=5$ $a_{12}=6$
$a_{21}=10$ $a_{22}=12$
$a_{31}=15$ $a_{32}=18$

Generalizando, uma matriz A do tipo ***m*** x ***n***, pode ser representada por:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ou, de uma forma sintética, por: $A = (a_{ij})$

Onde: $i \in \mathbb{N}$ e $1 \leq i \leq m$
$j \in \mathbb{N}$ e $1 \leq j \leq n$

Exercícios resolvidos:

1) Considerando a matriz $A = \begin{bmatrix} 6 & 7 & -1 & 6 \\ 4 & 0 & 7/3 & 8 \\ -3 & 2 & \sqrt{5} & 1/2 \end{bmatrix}$

a) Qual o tipo da matriz A ?

b) Identifique os elementos a_{11}, a_{22}, a_{31}, a_{13},a_{24} e a_{34}

Resolução:

a) A matriz A tem 3 linhas e 4 colunas
Logo, é do tipo ***3*** x ***4***.

b) $a_{11} = 6$, $a_{22} = 0$, $a_{31} = 4$, $a_{13} = -1$,
$a_{24} = 8$ e $a_{34} = \frac{1}{2}$

2) Escreva a matriz $A = (a_{ij}),3\times2$, tal que $a_{ij}=2i+j$

Resolução:

A matriz A é do tipo ***3 x 2***, isto é: $A = \begin{bmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \\ a31 & a32 \end{bmatrix}$

Para encontrarmos a matriz A, devemos proceder a substituição de ***i*** e de ***j*** , pelos seus valores na condição fornecida, ou seja, $a_{ij}=2i+j$.

Lembre-se que: i→indica a linha e j→indica a coluna.

Então, teremos:

$a_{11}=2(1)+1=3$ $a_{12}=2(1)+2=4$
$a_{21}=2(2)+1=5$ $a_{22}=2(2)+2=6$
$a_{31}=2(3)+1=7$ $a_{32}=2(3)+2=8$

Após a substituição de i e j , encontramos a matriz $A= \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}$

INDICAÇÃO DE LEITURA COMPLEMENTAR

KOLMAN, Bernard HILL, David R. **Introdução a Álgebra Linear com aplicações**. 8a. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

BOLDRINI, José Luiz. **Álgebra Linear.** São Paulo: Harbra: 2006.

PARA REFLETIR

Neste primeiro tema introduzimos os conceitos básicos de matrizes e suas diversas aplicações em todos os ramos do conhecimento. É importante que você realize uma breve pesquisa sobre as aplicações das matrizes estudadas e as suas aplicações na computação.

Após a leitura e a pesquisa efetuada, reflita sobre a aplicabilidade das matrizes na área da computação e no desenvolvimento de softwares capazes de efetuar interação humana nos processos organizacionais das empresas.

1.2 Tipos de matrizes

A partir de agora, vamos estudar os tipos de matrizes mais usadas em nossa disciplina.

MATRIZ LINHA

Chama-se matriz linha a matriz que só tem uma linha.

Exemplo: $A = [3 \quad 4 \quad 5 \quad 6 \quad 7]$ (1x5)

MATRIZ COLUNA

Chama-se matriz coluna a matriz que só tem uma coluna.

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}$ (5x1)

MATRIZ QUADRADA

Uma matriz do tipo mxn é denominada quadrada quando **m = n**, isto é, quando o número de linhas é igual ao número de colunas. Quando se diz que uma matriz é quadrada de ordem n, devemos entender que é do tipo nxn.

Exemplos:

$A = (3)$, matriz quadrada de ordem 1 (1x1)

$B = \begin{bmatrix} -2 & 4 \\ 5 & -3 \end{bmatrix}$, matriz quadrada de ordem 2 (2x2)

$C = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 \\ 0 & -6 & 2 \\ -5 & 3 & 6 \end{bmatrix}$, matriz quadrada de ordem 3 (3x3)

Considerando as matrizes B e C do exemplo podemos identificar a diagonal principal e a diagonal secundária.

A diagonal principal é composta dos elementos **aij**,quando **I = j**. Na matriz B, são **-2** e **-3**; na matriz C, são **1,-6** e **6**.

Quando **i+j=n+1**, determinamos os elementos da diagonal secundária, que é perpendicular à diagonal principal.

Então, na matriz B, são **4** e **5** ; na matriz C, são **0,-6** e **-5**.

Exercício resolvido:

1) Seja a matriz A = (a_{ij})3x3, tal que a_{ij} = i+j, determinar:

a) Os elementos da diagonal principal.

b) Os elementos da diagonal secundária.

Resolução:

a) A matriz A é de ordem 3. Logo, os elementos da diagonal principal são a11, a22 e a33 , ou seja **i = j**.

Então, utilizando a condição dada e substituindo os valores de i e de j, teremos:

a11 = 1+1=2 a22= 2+2=4 a33=3+3=6

$$A = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 4 & \\ & & 6 \end{bmatrix}$$

b) Sabemos que a matriz A é de ordem 3, os elementos da diagonal secundária são a13, a22 e a31, ou seja **i +j = n+1**.

Portanto, utilizando a condição dada e substituindo os valores de i e de j, obteremos: a13 = 1+3=4 a22= 2+2=4 a31 = 3+1=4

$$A = \begin{bmatrix} & & 4 \\ & 4 & \\ 4 & & \end{bmatrix}$$

MATRIZ DIAGONAL

Uma matriz quadrada **A=(a_{ij}) n x n** é uma matriz diagonal, se todos os elementos que não pertencem à diagonal principal são iguais a zero, isto é, **a_{ij}=0** se **i ≠ j**.

Exemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Exercício resolvido:

Calcule x e y, sabendo que a matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & x+y \\ x-y-2 & 8 \end{bmatrix}$ é diagonal.

Resolução:

A matriz A é denominada diagonal, quando os elementos que não pertencem à diagonal principal são iguais a zero.

Então: x+y = 0 → x+y=0
x-y-2=0 →x-y=2

Aplicando o método da adição, para solução do sistema de equações, temos: 2x=2 →x=1 e →1+y=0 w→y= -1

MATRIZ NULA

Uma matriz A do tipo ***m x n*** é nula quando todos os seus elementos são iguais a zero.

Exemplos:

$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$ $C = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$

Exercício resolvido:

Calcule x e y, sabendo que a matriz $A = \begin{bmatrix} 0 & x+2 & o \\ 0 & o & y-5 \end{bmatrix}$ é nula.

Resolução:

Para que a matriz A seja nula, todos os seus elementos devem ser nulos.

Logo: $x+2=0 \rightarrow x = -2$ e $y - 5 = 0 \rightarrow y = 5$

MATRIZ IDENTIDADE

É toda matriz diagonal, em que os elementos da diagonal principal são todos iguais a 1. A matriz identidade de ordem **n** é indicada por **In**.

Exemplos:

$I_1 = [\,1\,]$ $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $I_3 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$

$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Exercício resolvido:

Sabendo que a matriz $A = \begin{bmatrix} x+y & 0 \\ 0 & 3x-y-2 \end{bmatrix}$ é uma matriz identidade, calcular x e y.

Resolução:

Para que a matriz A seja uma matriz identidade, todos os elementos da diagonal principal devem ser iguais a 1, então:

$x+y=1 \rightarrow x+y=1$

$3x-y-2=1 \rightarrow 3x-y=1+2 \rightarrow 3x-y=3$

Resolvendo o sistema pelo método da adição, teremos: $4x=4 \rightarrow x=1$

Substituindo o valor de x, em qualquer uma das equações do sistema, obteremos o valor de y, então: $x+y=1 \rightarrow 1+y=1 \rightarrow y=1-1 \rightarrow y=0$

MATRIZ SIMÉTRICA

Uma matriz quadrada $A=(a_{ij})_{n \times n}$ é denominada simétrica se, e somente se, $a_{ij} = a_{ji}$.

Exemplos:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow a_{12} = a_{21} = 1$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 9 \end{bmatrix} \rightarrow b_{12}=b_{21}=2 \;;\; b_{13}=b_{31}=3 \;;\; b_{23}=b_{32}=7$$

MATRIZ OPOSTA

A matriz oposta de A, indicamos por –A, é aquela em que o elemento que está na linha i e na coluna j, é o oposto do elemento que está na linha i e na coluna j de A.

Exemplo:

$A = \begin{bmatrix} -3 & 7 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} \rightarrow -A = \begin{bmatrix} 3 & -7 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} -7 & 8 \end{bmatrix} \rightarrow -B = \begin{bmatrix} 7 & -8 \end{bmatrix}$

Exercícios resolvidos:

1) Obtenha a matriz oposta de cada matriz dada:

$A = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix} \rightarrow -A = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ -8 \end{bmatrix}$

$B = \begin{bmatrix} -3 & -2 & 2 & -8 \\ 2 & 4 & -6 & 3 \end{bmatrix} \rightarrow -B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -2 & 8 \\ -2 & -4 & 6 & -3 \end{bmatrix}$

2) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 2 & -x \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} y & 4 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$, determinar x e y, sabendo que B = - A.

Resolução:

Primeiro vamos determinar a matriz oposta de A, ou seja - A.

Então, teremos: $-A = \begin{bmatrix} -2 & x \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$

Utilizando a condição dada, $\begin{bmatrix} y & 4 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & x \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$

e, segundo a propriedade de igualdade de matrizes, temos: x=4 e y=-2.

INDICAÇÃO DE LEITURA COMPLEMENTAR

KOLMAN, Bernard HILL, David R. **Introdução à Álgebra Linear com aplicações**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

BOLDRINI, José Luiz. **Álgebra Linear.** São Paulo: Harbra: 2006

PARA REFLETIR

O objetivo do estudo das matrizes é fornecer ao aluno os recursos básicos para o entendimento das atividades posteriores. Agora já sabemos identificar o tipo de cada matriz. Sendo assim, reflita sobre a importância dos vários tipos de matrizes existentes e as suas diversas aplicações na matemática e na computação.

1.3 Operações com Matrizes

IGUALDADE DE MATRIZES

Dizemos que duas matrizes A e B, ambas do mesmo tipo ***m x n***, são iguais (A=B), se os elementos que ocupam a mesma posição são iguais.

Então: **A = B** $\leftrightarrow$ $\mathbf{a_{ij} = b_{ij}}$

Exercícios resolvidos:

1) Determine x, y, a e b para que as seguintes matrizes sejam iguais:

$$A=\begin{bmatrix}2 & x\\ 3 & y\end{bmatrix} \quad e \quad B=\begin{bmatrix}a & 5\\ b & 7\end{bmatrix}$$

Resolução:

Para que as matrizes A e B, sejam iguais, deve-se observar, inicialmente, se as matrizes são de mesma ordem e, igualar os elementos correspondentes. Neste caso, as matrizes A e B são de ordem 2 e, assim sendo, podemos igualar os elementos correspondentes:

x=5, y=7, a=2 e b=3

2) Sabendo que **A = B**, calcule x e y, dadas as matrizes

$$A=\begin{bmatrix}3 & x\\ -1 & 4\end{bmatrix} \quad e \quad B=\begin{bmatrix}y+1 & 5\\ -1 & 4\end{bmatrix}$$

Resolução:
Como as matrizes dadas são de mesma ordem, igualando os elementos correspondentes, temos:

x = 5 e y + 1 = 3 y = 3 - 1 y = 2

ADIÇÃO DE MATRIZES

Dadas duas matrizes **A** e **B**, ambas do tipo **m x n**, a soma de **A** com **B** resulta na matriz C, do tipo **m x n**.

Nessa nova matriz, o elemento que se encontra na linha i e na coluna j é a soma dos elementos de A e B que se encontram na linha i e na coluna j, ou seja:

$$\mathbf{C = A + B} \rightarrow \mathbf{C} = \begin{bmatrix} a11 & a12 \\ a21 & a22 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b11 & b12 \\ b21 & b22 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} a11 + b11 & a12 + b12 \\ a21 + b21 & a22 + b22 \end{bmatrix}$$

PROPRIEDADES DA ADIÇÃO

Para matrizes de um mesmo tipo, onde Φ representa a matriz nula, demonstram-se as seguintes propriedades:

1ª) Associativa
$(A+B) + C = A + (B + C)$

2ª) Comutativa
$A + B = B + A$

3ª) Existência de elemento neutro
$A + \Phi = \Phi + A = A$

4ª) Existência de matriz oposta
$A + (-A) = (-A) + A = \Phi$

Exercício resolvido:

Considerando as matrizes $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 8 & 7 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix}$, determinar **A + B**.

Resolução:

Podemos observar que as matrizes A e B são de mesma ordem(2x3) e, assim, é possível calcular a soma A + B.

Então: $C = A + B \rightarrow C = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 8 & 7 \\ 9 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

$$C = \begin{bmatrix} 2+3 & 3+8 & 4+7 \\ 5+9 & 6+3 & 7+2 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 11 & 11 \\ 14 & 9 & 9 \end{bmatrix}$$

SUBTRAÇÃO DE MATRIZES

Dadas duas matrizes **A** e **B**, do tipo **m x n**, subtrair **B** de **A** é o mesmo que somar a matriz **A** com a oposta da matriz **B**.

Simbolicamente, temos:

$$\mathbf{A - B = A + (-B)}$$

Exercícios resolvidos:

1) Se $A = \begin{bmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 8 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} -5 & -2 & 1 \\ 7 & 4 & -3 \end{bmatrix}$, determinar:

a) A – B

b)B – A

Resolução:

a) $A + (-B) \rightarrow \begin{bmatrix} 7 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 8 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 2 & -1 \\ -7 & -4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 5 & 4 \\ -3 & -4 & 11 \end{bmatrix}$

b) $B+(-A) \rightarrow \begin{bmatrix} -5 & -2 & 1 \\ 7 & 4 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -7 & -3 & -5 \\ -4 & 0 & -8 \end{bmatrix}$

$B + (-A) = \begin{bmatrix} -12 & -5 & -4 \\ 3 & 4 & -11 \end{bmatrix}$

2) Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 9 & 27 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, obter a matriz X, tal que: **X + A = B**

Resolução:

Da equação dada, temos que X = B – A ou X = B + (- A), então:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -4 & -8 \\ -3 & -9 & -27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & -8 \\ -1 & -7 & -26 \end{bmatrix}$$

MULTIPLICAÇÃO DE UM NÚMERO POR UMA MATRIZ

Seja **p** um número real e **A** uma matriz do tipo **mxn**. O produto do número **p** pela matriz **A** é a matriz **B,** formada pelos elementos de **A** multiplicados por **p**.

Exemplo:

Seja $A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$ e p = 3 , então:

$$B = p.\ A = 3. \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & -3 \\ 3 & 6 \\ 21 & 9 \end{bmatrix}$$

Exercício resolvido:

Sejam as matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$, calcular:

a) 2A
b) 3B
c) 2A + 3B

Resolução:

a) $2A = 2.\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

b) $3B = 3.\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -9 \\ 12 & -3 \end{bmatrix}$

c) $2A + 3B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 & -9 \\ 12 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -9 \\ 12 & -1 \end{bmatrix}$

PROPRIEDADES

Se A e B são matrizes do mesmo tipo, e se **a** e **b** são números reais, demonstram-se as seguintes propriedades:

1ª) Associativa
a(**b A**) = (**ab**)A

2ª) Distributiva
a(A+B) = **a**A + **a**B
(**a+b**)A = **a**A + **b**A

3ª) Elemento neutro
1.A = A

MULTIPLICAÇÃO DE MATRIZES

Consideremos uma matriz **A** do tipo **mxn** e **B** uma matriz do tipo **nxp**. O produto da matriz **A** pela matriz **B** é a matriz **C** do tipo **mxp**. Na matriz **C** os elementos são os produtos das linhas de **A** pelas colunas de **B**, isto é:

Cij = Li . Cj

Ou **C = A.B** = $\begin{bmatrix} L1.C1 & L1.C2 \ldots & L1.Cp \\ L2.C1 & L2.C2 \ldots & L2.Cp \\ \ldots \ldots & \ldots \ldots \ldots & \ldots \ldots \\ Lm.C1 & Lm.C2 \ldots & Lm.Cp \end{bmatrix}$ (mxp)

Observações:

1) A matriz **C = A . B** tem o número de l**inhas de A** e o número de **colunas de B**.

A mx**n** . B **n**xp = C **mxp**

2) O produto da matriz **A** pela matriz **B** só é possível quando o **número de colunas de A** é igual ao **número de linhas de B.**

Exemplo:

Dadas as matrizes $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -2 & 3 \\ -1 & -6 \end{bmatrix}$, efetuar:

a) A . B

b) B . A

Resolução:

a) A2x3 . B3x2 = C2x2 = $\begin{bmatrix} C11 & C12 \\ C21 & C22 \end{bmatrix}$

C11= L1.C1 =$\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$ = 5.2 + 2.(-2) + 1.(-1)=10-4-1= 5

C12= L1.C2= $\begin{bmatrix} 5 & 2 & 1 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$= 5.(-5)+ 2.3 + 1.(-6)=-25+6-6=-25

C21=L2.C1 =$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}$=1.2 + 3.(-2)+4.(-1)=2-6-4= -8

C22=L2.C2= $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$=1.(-5)+3.3+4.(-6)=-5+9-24=-20

Logo, $C = \begin{bmatrix} 5 & -25 \\ -8 & -20 \end{bmatrix}$

b) $B_{3x2} \,.\, A_{2x3} = C_{3x3} = \begin{bmatrix} C11 & C12 & C13 \\ C21 & C22 & C23 \\ C31 & C32 & C33 \end{bmatrix}$

$C11=L1.C1= \begin{bmatrix} 2 & -5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = 2.5 + (-5).1 = 10 - 5 = 5$

$C12=L1.C2= \begin{bmatrix} 2 & -5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = 2.2 + (-5).3 = 4 - 15 = -11$

$C13=L1.C3= \begin{bmatrix} 2 & -5 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = 2.1 + (-5).4 = 2 - 20 = -18$

$C21=L2.C1= \begin{bmatrix} -2 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = (-2).5 + 3.1 = -10 + 3 = -7$

$C22=L2.C2= \begin{bmatrix} -2 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = (-2).2 + 3.3 = -4 + 9 = 5$

$C23=L2.C3= \begin{bmatrix} -2 & 3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = (-2).1 + 3.4 = -2 + 12 = 10$

$C31=L3.C1= \begin{bmatrix} -1 & -6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} = (-1).5 + (-6).1 = -5 - 6 = -11$

$C32=L3.C2= \begin{bmatrix} -1 & -6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = (-1).2 + (-6).3 = -2 - 18 = -20$

$C33=L3.C3= \begin{bmatrix} -1 & -6 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} = (-1).1 + (-6).4 = -1 - 24 = -25$

Logo, $C = \begin{bmatrix} 5 & -11 & -18 \\ -7 & 5 & 10 \\ -11 & -20 & -25 \end{bmatrix}$

PROPRIEDADES DA MULTIPLICAÇÃO

Sendo A, B e C matrizes e K um número real, e supondo todas as operações possíveis, podemos demonstrar as seguintes propriedades:

1ª) Associativa
(A.B).C = A.(B.C)

2ª) Distributiva à direita em relação à adição
A.(B+C) = A.B + A.C

3ª) Distributiva à esquerda em relação à adição
$(A+B).C = A.C + B.C$

4ª) $k.(AB) = (kA).B = A.(kB)$

5ª) $A_{mxn} . I_n = I_n . A_{mxn} = A_{mxn}$

Observações:

1) A multiplicação de matrizes não é comutativa, Isto é, existem matrizes A e B tais que $A.B \neq B.A$.

2) Se ocorrer $A.B=B.A$, dizemos que as matrizes A e B comutam.
3) Na multiplicação de matrizes não vale a lei do anulamento do produto, isto é, podemos ter $A.B=0$, mesmo que $A\neq 0$ e $B\neq 0$.
4) Não vale a lei do cancelamento, isto é, podemos ter $A.B = A.C$, mesmo que $A \neq 0$ e $B \neq C$.

INDICAÇÃO DE LEITURA COMPLEMENTAR

KOLMAN, Bernard HILL, David R. **Introdução à Álgebra Linear com aplicações**. 8a. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

BOLDRINI, José Luiz. **Álgebra Linear**. São Paulo: Harbra: 2006.

PARA REFLETIR

Com o estudo de algumas operações com matrizes, já estamos munidos de informações para resolução de exercícios. Pratique bastante! Somente com a sistemática resolução de exercícios é que você desenvolverá o aprendizado.

Agora, vamos refletir: as operações das matrizes são fundamentais para a resolução de problemas matemáticos do nosso cotidiano?

1.4 Matriz Transposta

Dada uma matriz **A** do tipo **mxn**, a matriz transposta de **A**, que indicaremos por A^t, é a matriz do tipo **nxm**, trocando-se ordenadamente as linhas pelas colunas.

Exemplo:

Seja $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ -1 & 2 & 7 \end{bmatrix}$ (2x3) , então

$$A^t = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} (3x2)$$

Exercício resolvido:

Obtenha, em cada caso, a matriz transposta

a) $A = [-1 \quad 2 \quad 7]\ (1x3) \rightarrow A^t = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}\ (3x1)$

b) $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix} (4x1) \rightarrow B^t = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4]\ (1x4)$

c) $C = \begin{bmatrix} 2 & -5 & 6 \\ 0 & 8 & 4 \\ -1 & 7 & 9 \end{bmatrix} (3x3) \rightarrow C^t = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -5 & 8 & 7 \\ 6 & 4 & 9 \end{bmatrix} (3x3)$

PROPRIEDADES DA MATRIZ TRANSPOSTA

A operação de transposição em matrizes verifica as seguintes propriedades:

1ª) $(A+B)^t = A^t + B^t$
2ª) $(A^t)^t = A$
3ª) $(KA)^t = K \cdot A^t$
4ª) $(AB)^t = B^t \cdot A^t$

MATRIZ INVERSA

Dadas as matrizes **A e B**,quadradas de ordem **n**,se **A.B=B.A=In**, então **A** é a matriz inversa de **B** e **B** é a matriz inversa de **A**.

Exemplo:

As matrizes A = $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$ e B= $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$ são inversas, pois:

A.B =$\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ = I2 e

B.A = $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ = I2

Se A e B são matrizes inversas entre si, podemos escrever:
A = B^{-1} ou B = A^{-1}

No exemplo, teríamos:
A = $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$, então $A^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$

ou
B = $\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -5 & 4 \end{bmatrix}$, então $B^{-1} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$

O símbolo A^{-1} e B^{-1}, representa matriz inversa.

Exercícios resolvidos:

1) Determine a matriz inversa da matriz A = $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

Resolução:

A matriz A é do tipo 2x2 e a sua inversa A^{-1}, também do tipo 2x2.

Seja, então, $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$

Pela definição, temos: A. A^{-1} = In ou A . A^{-1} = I2 ou seja:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Efetuando o produto, temos:

$$\begin{bmatrix} L1.C1 & L1.C2 \\ L2.C1 & L2.C2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Calculando os produtos de forma isolada, obtemos:

L1.C1 = 2x + 3z   L1.C2 = 2y+3w

L2.C1 = x + 2z   L2.C2 = y + 2w

Substituindo na matriz, teremos:

$$\begin{bmatrix} 2x + 3z & 2y + 3w \\ x + 2z & y + 2w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Utilizando o conceito de igualdade de matrizes, formaremos os seguintes sistemas:

2x+3z=1   2y+3w=0

x+2z=0   y+2w=1

Aplicando o método da substituição, em ambos os sistemas:

x= -2z → 2(-2z) +3z=1 → -4z+3z=1 → z= -1 e x=2

y=1-2w → 2(1-2w)+3w=0 →2-4w+3w=0 → w=2 e y= -3

Substituindo em $A^{-1} = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \rightarrow A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$

2) Dada a equação matricial $\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 22 \end{bmatrix}$, achar o valor de x + y.

Resolução:

Na equação temos o produto das matrizes $\begin{bmatrix} -1 & 6 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$, e a matriz resultante $\begin{bmatrix} 1 \\ 22 \end{bmatrix}$.

Verifica-se que as matrizes têm as seguintes ordens:
(2x2) . (2x1) = (2x1)

Então, como o número de colunas da primeira matriz é igual ao número de linhas da segunda, a matriz resultante é 2x1.

Efetuando, teremos:

$$\begin{bmatrix} (-1). x + 6y \\ 4x + 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 22 \end{bmatrix}$$

Igualando as linhas correspondentes, obtemos:
$-x + 6y = 1 \rightarrow 6y-1 = x$ substituindo na outra equação $4(6y-1) + 2y = 22$
$\rightarrow 24y-4+2y=22 \rightarrow 26y=22+4 \rightarrow y=1$ e $x=5$
Logo, $x+y = 5+1 = 6$

INDICAÇÃO DE LEITURA COMPLEMENTAR

KOLMAN, Bernard HILL, David R. **Introdução à Álgebra Linear com aplicações**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

BOLDRINI, José Luiz. **Álgebra Linear**. São Paulo: Harbra: 2006

PARA REFLETIR

Concluímos o estudo sobre matrizes. Procure, sempre, resolver exercícios constantes nos materiais e aumente seu conhecimento sobre as matrizes e sua relação com a computação.

Agora, vamos refletir: As matrizes ajudam na concepção de elaboração de programas por parte do programador de computador no momento do desenvolvimento de um algoritmo?

RESUMO

Neste tema vimos os conceitos, tipos, operações e diversos exercícios resolvidos. Vamos necessitar deste estudo para os próximos temas.

Sistemas de equações lineares

Os sistemas de equações lineares e suas soluções constituem um dos principais tópicos de estudos em Álgebra Linear.

2.1 Determinantes

INTRODUÇÃO

A procura de soluções para os sistemas lineares levou os matemáticos à descoberta de determinadas combinações entre os coeficientes das equações envolvidas nesses sistemas. Tais combinações, denominadas **determinantes**, constituem, desde então, importante ferramenta na resolução de sistemas lineares.

A teoria dos **determinantes** surgiu quase simultaneamente na Alemanha e no Japão. Ela foi desenvolvida por dois matemáticos, **Gottfried Wilhelm Leibniz** (1642-1716) e **Seki Shinsuke Kowa** (1642-1708), ao solucionarem um problema de eliminações necessárias à resolução de um sistema de n equações lineares com n incógnitas.

Depois vêm, em ordem cronológica, os trabalhos de Cramer (1704-1752), Laplace (1749 - 1827), Vandermonde (1735 - 1796), Cauchy (1789 - 1857) e Jacobi (1804 - 1851).

DETERMINANTES DE MATRIZES DE 1ª, 2ª E 3ª ORDENS

- Matriz 1x1

Dada a matriz $A = [a_{11}]$, o seu determinante é o próprio número a_{11} :

$\det A = |a_{11}| = a_{11}$

Exemplo:

Para a matriz A = [-3], temos: det A = -3

- Matriz 2x2

Dada a matriz $A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$, o seu determinante é igual ao produto dos elementos da diagonal principal menos o produto dos elementos da diagonal secundária:

det A = $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ = $a_{11}.\ a_{22}$ - $a_{12}.\ a_{21}$

Exemplo:

O determinante da matriz A = $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ é:

det A = $\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ = 3.5 – 2.4 = 15-8= 7→det A = 7

- Matriz 3x3

Dada a matriz A = $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$,

o seu determinante pode ser calculado através de uma regra prática, denominada regra de Sarrus (1798 - 1861) (lê-se Sarri) ou pela regra do octógono estrelado.

Acompanhe as etapas que compõem a regra de Sarrus:

1ª) Repetem-se, à direita da matriz, as duas primeiras colunas:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

2ª) Efetuam-se os produtos dos elementos indicados na diagonal principal, conservando os sinais:

$a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31} + a_{13}.a_{21}.a_{32}$

3ª) Efetuam-se os produtos dos elementos indicados na diagonal secundária, trocando-se os sinais:

$- a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{11}.a_{23}.a_{32} - a_{12}.a_{21}.a_{33}$

4ª) Somam-se os produtos obtidos:

$$\det A=(a_{11}.a_{22}.a_{33} + a_{12}.a_{23}.a_{31}+ a_{13}.a_{21}.a_{32}) + (- a_{13}.a_{22}.a_{31} - a_{11}.a_{23}.a_{32} - a_{12}.a_{21}.a_{33})$$

Exemplos:

1) O determinante da matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ é:

Resolução:

Aplicando-se a regra de Sarrus:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{matrix}$$

det A = 1.1.4 + 2.0.2 + 1.3.1 - 1.1.2 - 1.0.1 - 2.3.4

det A = 4+0+3-2-0-24

det A = 7-26

det A = -19

2) Dada a matriz $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, calcular o det (A):

Resolução:

Pela regra de Sarrus;

$$\det(A) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ 4 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} -2 & 1 \\ 4 & 2 \\ 5 & 1 \end{matrix}$$

det(A)=(-2).2.1+1.(-1).5+(-3).4.1-(-3).2.5-(-2).(-1).1-1.4.1

det(A) = -4-5-12+30-2-4

det(A) = 30 – 27

det(A) = 3

A regra do octógono estrelado é uma versão da regra de Sarrus, sem, contudo, repetir as duas primeiras colunas, o que torna a resolução extremamente simples e rápida.

Para sua aplicação, devemos realizar os seguintes passos:

a) Efetuar o produto dos elementos da diagonal principal;
b) Efetuar o produto dos elementos paralelos à diagonal principal formando dois triângulos;
c) Efetuar o produto dos elementos da diagonal secundária, não esquecendo de inverter o sinal.
d) Efetuar o produto dos elementos paralelos à diagonal secundária formando dois triângulos e não esquecendo de inverter o sinal.

Exemplo:

Calcular o determinante da matriz $A=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 2 \\ 3 & 7 & 8 \end{bmatrix}$

Resolução:

Pela regra do octógono estrelado, temos:

Diagonal principal: 3.0.8 = 0

Triângulos paralelos à diagonal principal: 1.2.3 = 6 e (-2).4.7 = -56

Diagonal Secundária: (-2).0.3 = 0

Triângulos paralelos à diagonal secundária: 1.4.8 = 32 e 3.2.7 = 42

Então, teremos:

det A = 0+6 -56 - 0 –32 –42
det A = 6 -56-74
det A = 6 – 130
det A = - 124

Determinante de matriz quadrada de ordem n>3
Seja a matriz quadrada de ordem n indicada a seguir:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Podemos calcular o determinante da matriz A, utilizando o **teorema de Laplace** das seguintes formas:

Teorema de Laplace: O determinante de uma matriz quadrada de ordem é igual à soma dos produtos dos elementos de uma linha ou coluna, pelos seus respectivos cofatores.

1) Fixando a linha i
   $\det A = a_{i1}.A_{i1} + a_{i2}.A_{i2} + a_{i3}.A_{i3} + ... + a_{in}.A_{in}$

2) Fixando a coluna j
   $\det A = a_{1j}.A_{1j} + a_{2j}.A_{2j} + a_{3j}.A_{3j} + ...+ a_{nj}.A_{nj}$

Exemplo:

Calcular o valor da matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -5 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -2 & 6 \end{bmatrix}$

Resolução:

Para o cálculo deste determinante, não é possível aplicarmos a **regra de Sarrus** ou do **octógono estrelado**, pois, estas, são somente para determinantes de até ordem 3.

Vamos, então, utilizar o **teorema de Laplace**.

Assim, desenvolvendo o determinante da matriz dada, segundo os elementos da 1ª linha, temos:

$\det A = a_{11}.A_{11} + a_{12}.A_{12} + a_{13}.A_{13} + a_{14}.A_{14}$ (1)

Cálculo dos A_{ij}

$$A_{11} = 2.\ (-1)^{1+1}.\begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 2.17=34$$

$$A_{12} = 3.\ (-1)^{1+2}.\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = (-3).44=-132$$

$$A_{13} = (-1).(-1)^{1+3}. \begin{vmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 1 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 6 \end{vmatrix} = (-1).(-111) = 111$$

$$A_{14} = 0.(-1)^{1+4} . \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

O número real A_{ij} chamado de cofator do elemento a_{ij}. Logo, o determinante será dado por:
det(A) = 34 -132 + 111 = 13

PROPRIEDADES DOS DETERMINANTES

Relacionamos a seguir propriedades básicas dos determinantes:

1ª) Se os elementos de uma linha ou coluna de uma matriz quadrada forem todos iguais a zero, seu determinante será nulo;
2ª) Se os elementos de duas linhas (ou duas colunas) de uma matriz quadrada forem iguais, seu determinante será igual a zero;
3ª) Se trocarmos de posição entre si duas linhas (ou duas colunas) de uma matriz quadrada, o determinante da nova matriz é o anterior com sinal trocado;
4ª) O determinante de uma matriz quadrada A é igual ao determinante de sua matriz transposta A^t;
5ª) Se os elementos de uma matriz quadrada, situados acima ou abaixo da diagonal principal, forem todos nulos, o determinante da matriz será igual ao produto dos elementos da diagonal principal;
6ª) Se multiplicarmos todos os elementos de uma linha ou de uma coluna por um número real K, então o determinante da nova matriz é o anterior multiplicado pelo número K;
7ª) Se somarmos a uma linha ou coluna de uma matriz quadrada, uma outra linha ou coluna multiplicada por um número qualquer, o determinante da matriz não se altera.

INDICAÇÃO DE LEITURA COMPLEMENTAR

KOLMAN, Bernard HILL, David R. **Introdução a Álgebra Linear com aplicações**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

BOLDRINI, José Luiz. **Álgebra Linear**. São Paulo: Harbra: 2006.

PARA REFLETIR

Com o estudo de algumas operações com matrizes e determinantes, já estamos munidos de informações para resolução de exercícios. Pratique bastante! Somente com a sistemática resolução de exercícios é que você desenvolverá o aprendizado.
Agora, vamos refletir: para calcular o determinante da matriz, é de fato necessário utilizar o teorema de Laplace?

2.2 Equação linear

Chama-se equação linear toda equação do tipo:

$a_1 . x_1 + a_2 . x_2 + a_3 . x_3 + ... + a_n . x_n = b$

Nesta equação, os números reais $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$, são os coeficientes; b é o termo independente e $x_1, x_2, x_3, .. x_n$ são as incógnitas da equação.

Exemplos de equações lineares:

$x + 7y - 4z = 0$

$21x - 4y + \frac{1}{2}z + \sqrt{3}w = 7$

$2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 5x_4 = 8$

$4x - 3y + 5z = 31$

Exemplos de equações não lineares:

a) $x^2 - 3x - 5 = 0$

b) $\frac{1}{x} + \sqrt{x} - 3 = 4$

c) $x^3 + x^2 - x + 6 = 0$

d) $x + 4y + 7xz = 3$

Observações:

Numa equação linear, os expoentes de todas as incógnitas são sempre unitários. Desta forma, os exemplos $x^2-3x-5=0$, $\frac{1}{x} + \sqrt{x} - 3 = 4$ e $x^3 + x^2+x+6 = 0$ não são equações lineares.

Uma equação linear não apresenta termo misto. Então, a equação $x + 4y + 7xz = 3$, não é linear, em razão do termo misto $7xz$.

SOLUÇÃO DE UMA EQUAÇÃO LINEAR

Dizemos que a sequência ordenada ou n-upla de números reais $(\alpha_1, \alpha_2,...\alpha_n)$ é solução da equação $a_1.x_1+a_2.x_2+ a_3.x_3+...+a_n.x_n = b$ se, e somente se, a expressão $a_1.\alpha_1 + a_2.\alpha_2 +a_3.\alpha_3 +...+a_n.\alpha_n =b$ for verdadeira.

Exemplos:

a) A dupla (5,2) é a solução da equação 2x – 3y = 4, pois para x=5 e y=2, temos:

$2.5 - 3.2 = 4 \rightarrow 10 - 6 = 4 \rightarrow 4 = 4$ (Verdadeiro)

Assim, o par (5,2) é a solução da equação.

b) A dupla (10,20) é solução da equação x+y= 30, pois para x=10 e y=20, temos:

$10 + 20 = 30 \rightarrow 30 = 30$ (Verdadeiro)

Logo, o par ordenado (10,20) é solução da equação.

c) O terno (2,4,7) é solução da equação 4 x – 3y +5z = 31, pois para x=2,y=4 e z=7, temos:
$4.2 - 3.4 + 5.7 = 31$
$8 - 12 + 35 = 31$
$43 - 12 \rightarrow 31 = 31$

Assim, o terno (2,4,7) é solução da equação.

d) A quádrupla (3,-1,2,1) é solução da equação 2x+y-3z+2w=1, pois para x=3,y=-1,z=2 e w=1,temos:
$2.4+(-1)-3.2+2.1=1 \rightarrow 6-1-6+2=1 \rightarrow 1=1$ (Verdadeiro)

Então, a quádrupla (3,-1,2,1) é solução da equação.

COMO RESOLVER UMA EQUAÇÃO LINEAR

Consideremos a equação linear x-5y+2z=2. Para resolvê-la escolhemos um termo qualquer, cujo coeficiente seja diferente de zero, por exemplo, x, e isolamos este termo no primeiro membro: **x = 2+5y-2z**

Em seguida, atribuímos valores reais arbitrários a **y** e **z**.

Efetuando as operações, encontramos o valor de **x** correspondente.

Exemplo:

para y-0 e z-0 →x=2+5.0-2.0 →x=2
obtendo a solução (2,0,0)

para y=1 e z=0 →x=2+5.1-2.0 → x=7
obtendo a solução (7,1,0)

para y=2 e z=3 →x=2+5.2-2.3 →x=6
obtendo a solução (6,2,3)
e assim por diante.

Pode acontecer que todos os coeficientes das incógnitas sejam iguais a zero e o termo independente diferente de zero:

0x+0y+0z+0w = 10

Neste caso, não existe solução para a equação, pois para qualquer quádrupla obtemos 0=10, que é uma sentença falsa.

Finalmente, temos o caso em que todos os coeficientes das incógnitas e o termo independente são iguais a zero:

0x+0y+0z=0

Neste caso, qualquer tripla é solução da equação.

DEFINIÇÃO DE SISTEMA LINEAR

Um sistema linear é um conjunto de **m** equações lineares nas **n** incógnitas $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Neste sistema, os coeficientes a_{ij} e os termos independentes b_i são números reais.

Uma n-upla $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$ de números reais é a solução de um sistema linear de ***m*** equações e ***n*** incógnitas, se ela verificar todas as equações do sistema. O conjunto, cujos elementos são todas as soluções do sistema, é chamado de **conjunto solução** ou **solução geral** do sistema.

Por exemplo, a tripla (1,2,3) é solução do sistema:

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y + 3z = 8 \\ -x - 2y + z = -2 \end{cases}$$

Pois, para x=1, y=2 e z=3, as equações são verdadeiras, vejamos:

x+y+z=6 → 1+2+3 → 6=6
x – y +3z=8 → 1 -2 +3.3 =8 → 8=8
-x-2y+z=-2 → -1-2.2+3=-2 → -1-4+3=-2 → -2 = -2

INDICAÇÃO DE LEITURA COMPLEMENTAR

KOLMAN, Bernard HILL, David R. **Introdução à Álgebra Linear com aplicações**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

BOLDRINI, José Luiz. **Álgebra Linear**. São Paulo: Harbra: 2006

PARA REFLETIR

No AVA estão mais exercícios sobre este assunto. Sugerimos que o aluno faça todos os exercícios disponibilizados. Também sugerimos que o aluno pesquise nos livros e também na internet problemas que envolvam a solução de sistemas de equações lineares.

Agora, vamos refletir: os sistemas de equações lineares são importantes na elaboração de algoritmos? Qual estrutura algorítmica é possível ser identificada no momento de construir um programa de computador que esteja relacionada com as equações lineares?

2.3 Classificação de um Sistema Linear

Quanto ao número de soluções, um sistema pode ser:

- **Possível:** quando tem **pelo menos uma solução**, ou seja, quando o conjunto solução S é não vazio.

- **Impossível:** quando **não tem solução**, ou seja, quando o conjunto solução S é vazio.

Sendo **possível**, o sistema pode ser:

- **Determinado**: quando existe **uma única** solução, ou seja, quando o **conjunto solução é unitário**.

- **Indeterminado**: quando existem **infinitas** soluções, ou seja, quando o **conjunto solução é infinito**.

Para resumir essa classificação, apresentamos o seguinte quadro:

> Sistema linear determinado: S é unitário possível: S≠Φ
>
> Sistema linear Indeterminado: S é infinito Impossível: S=Φ

Exemplos:

a) O sistema $\begin{cases} x + y = 1 \\ x - y = 3 \end{cases}$ é possível e determinado: S ={(2,-1)}

Pelo método da adição 2x=4 → x=2 e y=1-2 → y=-1

b) O sistema $\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 3y = 6 \end{cases}$ é possível e indeterminado S={(2-y,y), y∈ R}

Podemos encontrar as infinitas soluções para um sistema, fazendo y como variável livre e variar em R. Eis algumas soluções:

- $y=0 \rightarrow x=2 \rightarrow (2,0)$
- $y=-1 \rightarrow x=3 \rightarrow (3,-1)$
- $y=2 \rightarrow x=0 \rightarrow (0,2)$ etc.

O sistema $\begin{cases} x+y=2 \\ 3x+3y=6 \end{cases}$ é impossível: $S = \Phi$

Exercícios resolvidos:

1) Assinale com **V**(verdadeiro) as equações lineares e com **F**(falso) aquelas que não são lineares:

a) $2x+3y=2$
b) $x^2- 5xy +3x=0$
c) $2xy+3x=7$
d) $4x-y-z=-1$

Resolução:

a) V
b) F (expoente não é unitário e termo misto xy)
c) F (termo misto xy)
d) V

2)Verifique quais das triplas seguintes são soluções da equação linear $x+y-2z=2$

a)(1,2,4)
b)(1,2,1/2)
c)(-3,-5,3)
d)(0,0,0)

Resolução:

a) não é solução
b) é solução
c) não é solução
d) não é solução

RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES

- **Método da equação matricial**

Exemplo:

Resolver o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$$

Resolução:

Vamos, inicialmente, identificar as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix},\ X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ e } B = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Substituindo na equação matricial, temos:

$$A.X = B$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Para efetuarmos o produto das matrizes, devemos verificar se o número de colunas de A é igual ao número de linhas de X, no caso n=m=2. Com isso, obteremos a matriz 2x1.

Então: $\begin{bmatrix} 2x + y \\ x - 3y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \end{bmatrix}$

Igualando as matrizes, teremos:

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \quad (1) \\ x - 3y = 0 \quad (2) \end{cases}$$

Em (2) x = 3y e substituindo na equação (1):

$2.3y+y=5 \rightarrow 6y+y=5 \rightarrow 7y=5 \rightarrow y=\frac{5}{7} \rightarrow x=3.\frac{5}{7} \rightarrow x=\frac{15}{7}$

- **Método da Regra de Cramer**

1) Consideremos o mesmo sistema de equação

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x - 3y = 0 \end{cases}$$

Seja ***D*** o valor do determinante dos coeficientes, ou seja:

$D = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 2.(-3) - 1.1 = -6 - 1 = -7 \rightarrow D \neq 0$

Além disso, seja D_x o determinante da matriz dos coeficientes trocando-se a primeira coluna de ***D*** pelo vetor dos termos independentes ***b*** e D_y, o determine da matriz dos coeficientes quanto trocamos a segunda coluna de ***D*** pelo vetor dos termos independentes, ou seja,

$$Dx = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 5.(-3) - 1.0 = -15$$

$$Dy = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2.0 - 1.5 = -5$$

Então: $x = \frac{Dx}{D} = \frac{-15}{-7} = \frac{15}{7} \rightarrow x = \frac{15}{7}$

$y = \frac{Dy}{D} = \frac{-5}{-7} = \frac{5}{7} \rightarrow y = \frac{5}{7}$ $\quad S=[(\frac{15}{7},\frac{5}{7})]$

O método descrito acima é conhecido como **Regra de Cramer**.

1) Resolver o sistema: $\begin{cases} x + y = 5 \\ -x - y = 2 \end{cases}$

Vamos, inicialmente, calcular o valor do determinante D formado pelos coeficientes das incógnitas.

$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 1.(-1) - 1.(-1) = -1+1 = 0$

Calculando o valor de Dx e Dy, temos:

$Dx = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 5.(-1) - 2.1 = -5 -2 = -7$

$Dy = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1.2 - 5.(-1) = 2+5 = 7$

Então:

$x = \frac{Dx}{D} = \frac{-7}{0}$ =impossível

$y = \frac{Dy}{D} = \frac{7}{0}$ = impossível

Logo, o sistema é impossível ou $S = \phi$

2) Resolver o sistema : $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 3x - 4y + 5z = 10 \\ x + y + z = 1 \end{cases}$

Como passo inicial, vamos determinar o valor do determinante D formado pelos coeficientes das incógnitas, logo:

$D = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Aplicando a regra do octógono estrelado, temos:

D= 1.(-4).1+2.5.1+3.1.(-1) – (-1).(-4).1 - 3.2.1 - 1.5.1 ou
D= -4+10-3-4-6-5
D= 10 -22
D= -12

Vamos, agora, determinar Dx,Dy e Dz:

$$Dx= \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 10 & -4 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Aplicando a regra do octógono estrelado, temos:

Dx=0.(-4)1+2.5.1+1.10.(-1)–1(-4).(-1)-0.5.1-2.10.1

Ou

Dx=0+10–10–4–0-20

$$Dy= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 10 & 5 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Adotando o mesmo procedimento, obtemos:

Dy=1.10.1+0.5.1+3.1.(-1) - 1.10.(-1) - 1.1.5 – 3.0.1

ou

Dy=10+0-3+10-5-0
Dy=20-8
Dy=12

$$Dz= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & -4 & 10 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Pelo regra do octógono estrelado, teremos:

Dz=1.(-4).1+2.10.1+3.1.0–1.(-4).0–1.10.1–2.3.1

Ou

Dz=-4+20+0+0-10-6
Dz=20-20 →Dz = 0

Logo, poderemos achar os valores de x, y e z, através de:

$x=\frac{Dx}{D}=\frac{-24}{-12}\rightarrow x=2$

$y=\frac{Dy}{D}=\frac{12}{-12}\rightarrow y=-1$

$z=\frac{Dz}{D}=\frac{0}{-12}\rightarrow z=0$

Portanto, o sistema é possível, determinado e S=[(2,-1,0)]

- **Método do Escalonamento**

Um sistema linear é dito escalonado quando está disposto nas seguintes formas:

$$\begin{cases} x+3y=4 \\ +y=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+2y-z=2 \\ +5y+z=1 \\ -z=7 \end{cases} \qquad \begin{cases} x+y+z-w=5 \\ +2y+3z+w=4 \\ +2z+3w=5 \end{cases}$$

Observe que, na primeira equação, aparecem todas as incógnitas, na 2ª desaparece a incógnita x, na 3ª desaparece a incógnita y, e assim sucessivamente.

O processo de resolução de um sistema linear que envolve a eliminação de incógnitas é denominado **método do escalonamento**.

Este método procura transformar o sistema dado em sistemas equivalentes (têm a mesma solução), até chegar a um sistema escalonado, usando as seguintes propriedades:

- Trocar a posição de duas equações;
- Trocar as incógnitas de posição;
- Multiplicar uma equação por um número real;
- Dividir uma das equações por um número real diferente de zero;
- Adicionar as equações;
- Tornar, sempre, o coeficiente de a_{11} igual a 1.

Exemplos resolvidos:

1) Resolver, por escalonamento, o sistema:

$$\begin{cases} 2x - y = 7 \\ x + 5y = -2 \end{cases}$$

Resolução:

Trocando a posição das equações:

$$\begin{cases} x + 5y = -2 \ (1) \\ 2x - y = 7 \ (2) \end{cases}$$

Multiplicando a equação (1) por (-2), para eliminar x:$-2x - 10y = 4$

Adicionando com a equação (2):

$$\begin{cases} -2x - 10y = 4 \\ 2x - y = 7 \end{cases}$$

$-11y = 11$ (3)

Agora, formando o novo sistema escalonado:

$$\begin{cases} x + 5y = -2 \ (1) \\ -11y = 11 \ (3) \end{cases}$$

Da equação (3), temos: $y = \frac{11}{-11} \rightarrow y = -1$

Substituindo o valor de y, na equação (1), obtemos x:

$x+5y= -2 \rightarrow x +5(-1)= -2x= -2+5 \rightarrow x=3$

Então: $S = [(3, -1)]$

2) Resolver o sistema por escalonamento:

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 5 \ (1) \\ 2x - y + 2z = 8 \ (2) \\ 3x - 3y - z = 7 \ (3) \end{cases}$$

Resolução:

Para aplicarmos o método do escalonamento, devemos observar se o elemento $a_{11}=1$, o que satisfaz em (1).

Agora, para eliminar x, nas equações (2) e (3), vamos multiplicar a equação (1), respectivamente, por -2 e – 3 e adicioná-la com as equações (2) e(3). Assim vejamos:

$$\begin{cases} -2x - 4y - 8z = -10 \\ \quad 2x - y + 2z = 8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -3x - 6y - 12z = -15 \\ \quad 3x - 3y - z = 7 \end{cases}$$

$-5y-6z=-2 \quad (4)$
$-9y-13z=-8 \quad (5)$

O novo sistema será:

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 5 \ (1) \\ -5y - 6z = -2 \ (4) \\ -9y - 13z = -8 \ (5) \end{cases}$$

Dividindo-se a equação (4) por (-5), vem:

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 5 \\ y + \frac{6\,z}{5} = \frac{2}{5}\ (6) \\ -9y - 13z = -8\ (5) \end{cases}$$

Multiplicando-se a equação (6) por 9 e somando-se com a equação (5), anularemos y de (5), então:

$$\begin{cases} 9y + \frac{54}{5}z = \frac{18}{5} \\ -9y - 13z = -8 \end{cases}$$

$$\frac{-11}{5}z = \frac{-22}{5}$$

Formatando, novamente, o sistema com as equações (1), (6) e (7), obtemos o sistema escalonado:

$$\begin{cases} x + 2y + 4z = 5 \\ y \quad + \frac{6}{5}\,z = \frac{2}{5} \\ \qquad \frac{-11}{5}\,z = \frac{-22}{5}\quad (7) \end{cases}$$

Da equação (7), obtemos que z=2, com o valor de z, na equação (4), temos y= -2 e, com y e z em (1), x=1.

Logo, S ={(1,-2,2)]

3) Resolver o sistema:

$$\begin{cases} x + 2y - z = 4\ (1) \\ 3x - y + z = 5\ (2) \end{cases}$$

Resolução:

Nos exercícios anteriores, o número de equações é igual ao número de incógnitas (m=n) e, neste, são diferentes.

Pelo escalonamento, multiplicando-se (1) por (-3) e adicionando-a com (2), temos:

$$\begin{cases} -3x - 6y + 3x = -12 \\ \quad 3x - y + z = 5 \end{cases}$$

-7y +4z = -7 (3)

Fazendo em (3), z=a , obtemos

$y = \frac{4a+7}{7}$ e $x= \frac{14-a}{7}$

Então, $S= [(\frac{14-a}{7} , \frac{4a+7}{7} , a)]$

INDICAÇÃO DE LEITURA COMPLEMENTAR

KOLMAN, Bernard HILL, David R. **Introdução à Álgebra Linear com aplicações**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

BOLDRINI, José Luiz. **Álgebra Linear**. São Paulo: Harbra: 2006

PARA REFLETIR

No AVA está disponibilizada uma lista de exercícios sobre este assunto.

Agora, vamos refletir: O método do escalonamento é aplicado somente na resolução de sistemas lineares que envolvem a eliminação de incógnitas?

Este método procura transformar o sistema dado em sistemas equivalentes até chegar a um sistema escalonado?

2. 4 Sistemas homogêneos

Um sistema linear homogêneo é formado por equações cujos termos independentes são todos nulos, isto é:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{21x_2} + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ ----------- \\ ------------- \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0 \end{cases}$$

Todo sistema linear homogêneo é sempre possível, pois admite a solução (0,0,...,0), chamada solução trivial.

Observe que, para um sistema homogêneo, sempre o determinante formado pela coluna dos termos independentes em substituição da coluna de cada uma das incógnitas (Regra de Cramer) serão nulos.

Portanto, para a discussão de um sistema linear homogêneo, é suficiente o estudo do determinante dos coeficientes das incógnitas.

Possível e determinado → det A ≠ 0
Possível e indeterminado → det A = 0

Exercícios resolvidos:

1) Classificar o sistema homogêneo $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ 6x - 3y = 0 \end{cases}$ em determinado ou indeterminado.

Resolução:

Para efetuarmos a classificação de um sistema linear homogêneo, faz-se necessário, apenas, determinarmos o valor do determinante dos coeficientes, ou seja:

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 6 & -3 \end{vmatrix} = 2.(-3) - (-1).6 = -6+6=0 \rightarrow \det A = 0$$

Como o det A = 0, então o sistema é possível e Indeterminado, possuindo infinitas soluções, tais como: (0,0),(1,2),(-2,-4) e etc.

2) Classificar o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 0 \\ x + y - 2z = 0 \\ 2x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

Resolução:

Seguindo o mesmo raciocínio anterior, vamos determinar o valor do determinante das incógnitas, então:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

det A=3.1.1+(-1).(-2).2+1.(-2).2–2.1.2-3.(-2).(-2)–1.1.(-1)
det A = 3 + 4 -4 -4 -12 +1
det A = 8 -20
det A = -12

Como o det A ≠ 0, então o sistema é possível, determinado e admite a solução trivial (0,0,0).

3) Determinar o valor de m para que o sistema

$$\begin{cases} 2x - y - 3z = 0 \\ 2x + 3y + z = 0 \\ mx + 2y + z = 0 \end{cases}$$, admita soluções próprias.

Resolução:

Um sistema linear homogêneo admite soluções próprias, quando é possível e indeterminado e, para isto, o determinante dos coeficientes deverá ser igual a zero.

Assim, o determinante dos coeficientes

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \\ m & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando a regra de Sarrus ou do octógono estrelado, temos:

det A= 2.3.1 + (-1).1.m +2.2.(-3) –(-3).3.m-2.1.2 -2.1.(-1)
det A = 6-m-12+9m-4+2
det A = 8m+8-16
det A = 8m-8

Pela condição o determinante det A=0 , então 8m-8=0 e m=1.
Logo, para m=1, o sistema admite soluções próprias.

SISTEMAS LINEARES EQUIVALENTES

Dois sistemas lineares são equivalentes, quando e somente quando admitem as mesmas soluções.

Representaremos a equivalência por $\equiv$ ou $\approx$

1) Os sistemas:

$$\begin{cases} x + y = 7 \\ x - y = -1 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} 2x - y = 2 \\ 3x + 2y = 17 \end{cases}$$

são equivalentes, pois admitem a solução (3,4).

2) Os sistemas:

$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 2x - y = -1 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} 2x - 3y = -7 \\ 3x + 2y = 9 \\ x + y = 4 \end{cases}$$

são equivalentes, pois admitem a solução (1,3).

2) Determine a e b, de modo que sejam equivalentes os sistemas:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 2 \end{cases} \quad e \quad \begin{cases} ax + by = 1 \\ bx - ay = 1 \end{cases}$$

Resolução:

Se os sistemas são equivalentes, então admitem as mesmas soluções.

Vamos resolver o primeiro sistema pelo método da adição e, para isso, devemos multiplicar por (-1).

$$\begin{cases} x - y = 0 \ (-1) \\ \quad x + y = 2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ \ x + y = 2 \end{cases}$$

2y = 2 y =1 e x = 1

Substituindo os valores de x=1 e y=1, no segundo sistema teremos:

$$\begin{cases} \ a + b = 1 \\ -a + b = 1 \end{cases}$$

2b = 2   b=1 e a=0

INDICAÇÃO DE LEITURA COMPLEMENTAR

KOLMAN, Bernard HILL, David R. **Introdução à Álgebra Linear com aplicações**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

STRANG, Gilbert. **Álgebra Linear e suas aplicações**. São Paulo: Cengage Learning 2010.

PARA REFLETIR

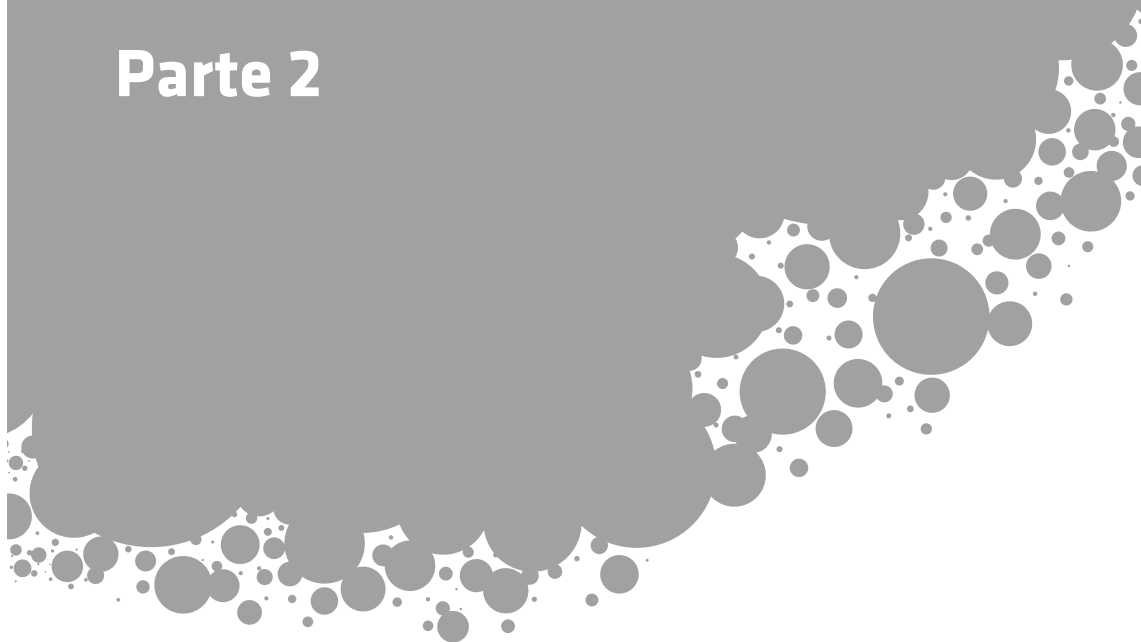
Sugerimos que o aluno resolva o todos os exercícios disponibilizados no AVA. Neste momento, estão dispostas mais de 40 questões para resolução e melhor compreensão do assunto.

Agora, vamos refletir: Um sistema linear homogêneo é formado por equações cujos termos independentes são todos nulos? Reflita sobre essa afirmação de maneira que possa identificar outras equações que possam ser aplicadas em equações lineares homogêneas.

RESUMO

Neste tema vimos a importância das matrizes e dos sistemas de equações lineares, suas aplicações e soluções mais viáveis na aplicação em Álgebra Linear. Algumas regras foram observadas de maneira a ajudar na resolução de atividades impostas na computação que contenham equações e suas resoluções com determinantes de matrizes.

ESPAÇOS VETORIAIS E TRANSFORMAÇÕES LINEARES

Parte 2

Espaços vetoriais

Muitas grandezas são completamente determinadas apenas por um número. Exemplos desse tipo são as medidas de tempo, área, massa, temperatura e pressão. Estas são chamadas grandezas escalares.

Contudo, algumas grandezas não são escalares, por exemplo, as grandezas físicas como velocidade, força, deslocamento e impulso, para serem completamente identificadas, precisam, além da magnitude (ou intensidade), da direção e do sentido.

Estas grandezas são chamadas grandezas vetoriais ou simplesmente vetores.

3.1 Vetores

Geometricamente, vetores são representados por segmentos de retas orientadas (segmentos de retas com um sentido de percurso) no plano e no espaço.

A ponta da seta do segmento orientado é chamada ponto final ou extremidade e o outro ponto extremo é chamado de ponto inicial ou origem do segmento orientado.

Se o ponto inicial de um representante de um vetor V é A e o ponto final é B, então escreveremos:

$$\overrightarrow{AB}$$

SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS NO PLANO

Definimos as componentes de um vetor V no plano, como sendo as coordenadas (v_1, v_2) do ponto final de V que tem ponto inicial na origem.

Escreve-se o vetor com as suas componentes (ou coordenadas), simplesmente por:

$V = (v_1 , v_2)$

Assim, as coordenadas de um ponto P são iguais as componentes do vetor $\overrightarrow{OP}$, que vai da origem do sistema de coordenadas ao ponto P. Em particular, o vetor nulo, $\ddot{0}$ = (0, 0).

Em termos das componentes, podemos realizar facilmente as operações: soma de vetores e multiplicação de escalar por vetor.

A soma de dois vetores $V = (v_1, v_2)$ e $W = (w_1,w_2)$ é dada por:

$V + W = (v_1 + w_1 , v_2 + w_2)$

A multiplicação de um escalar por um vetor $V = (v_1 , v_2)$, é dada por:

$\alpha V = (\alpha v_1 , \alpha v_2)$

SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS NO ESPAÇO

Definimos as componentes de um vetor V no espaço, como sendo as coordenadas (v_1, v_2, v_3) do ponto final de V que tem ponto inicial na origem.

Escreve-se o vetor com as suas componentes, simplesmente por:

$V = (v_1, v_2, v_3)$

Assim, as coordenadas de um ponto P são iguais as componentes do vetor, que vai da origem do sistema de coordenadas ao ponto P. Em particular, o vetor nulo,

$\ddot{0} = (0, 0, 0)$.

Em termos das componentes, como fizemos para vetores no plano, podem ser realizadas, facilmente, as operações: soma de vetores e multiplicação de escalar por vetor.

A soma de dois vetores $V = (v_1, v_2, v_3)$ e $W = (w_1, w_2, w_3)$ é dada por:

$V + W = (v_1 + w_1 , v_2 + w_2, v_3 + w_3)$

A multiplicação de um escalar por um vetor $V = (v_1, v_2, v_3)$, é dada por:

$\alpha V = (\alpha v_1, \alpha v_2, \alpha v_3)$

Exercício resolvido:

Dados os vetores V=(1,-2,3) e W=(2,4,-1), achar:

a) V + W

b) V – W

c) 3V

d) 4W

e) 3V + 4W

f) 3V – 4W

Resolução:

a) V + W = (1+2, -2+4, 3 – 1) = (3,2,2)

b) V – W = V + (-W) = (1-2,-2-4,3+1) = (-1,-6,4)

c) 3V = 3(1,-2,3) = (3,-6,9)

d) 4W= 4(2,4,-1) = (8,16,-4)

e) 3V+4W=(3,-6,9)+(8,16,-4)=(3+8,-6+16,9-4)=(11,10,5)

f) 3V-4W=3V+(-4W)=(3,-6,9)+(-8,-16,4)= (-5,-22,13)

Um vetor no espaço V = (v_1, v_2, v_3) pode, também, ser escrito na notação matricial, como uma matriz linha ou uma matriz coluna.

$$V = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \text{ ou } V = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Estas notações podem ser justificadas pelo fato de que as operações matriciais produzem os mesmos resultados que as operações vetoriais.

Assim, vejamos:

$$V+W = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ v_3 + w_3 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$\alpha V = \alpha \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \propto v_1 \\ \propto v_2 \\ \propto v_3 \end{bmatrix}$$

ou $V+W=[v_1,v_2,v_3] + [w_1,w_2,w_3]$

$V+W = [v_1+w_1,\ v_2+w_2,\ v_3+w_3]$

e $\alpha V = \alpha[v_1,v_2,v_3] = [\propto v_1,\ \alpha v_2,\ \alpha v_3]$

são equivalentes às vetoriais:

$V+W=(v_1,v_2,v_3) +(w_1,w_2,w_3)$

$V+W=(v_1+w_1,\ v_2+w_2,\ v_3+w_3)$

$\alpha V = \alpha(v_1,v_2,v_3) = (\ \alpha v_1,\alpha v_2,\alpha v_3)$

INDICAÇÃO DE LEITURA COMPLEMENTAR

KOLMAN, Bernard; HILL, David R. **Introdução à Álgebra linear com aplicações**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

STRANG, Gilbert. **Álgebra linear e suas aplicações**. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

O aluno deverá consultar os capítulos 2 e 3 deste livro que se referem aos conceitos de matrizes, sistemas lineares e determinantes.

PARA REFLETIR

Faça uma breve pesquisa sobre René Descartes (1596-1650). Agora, vamos refletir: A forma de geometricamente escrever um vetor no plano tridimensional é utilizada ainda hoje na matemática? Quais aplicações matemáticas na área da computação podemos encontrar essa forma de escrever um vetor?

3.2 Espaço Vetorial

DEFINIÇÃO

Um **espaço vetorial** é um conjunto não-vazio V de elementos, chamados vetores, sobre os quais estão definidas duas operações, chamadas soma e multiplicação por escalar (número real), que satisfazem alguns axiomas.

AXIOMAS DO ESPAÇO VETORIAL

1ª) Sejam u e v, quaisquer elementos de V, então u+v está em V, isto é, V é fechado em relação à adição.

a) $u+v=v+u$, para u e v em V

b) $u+(v+w)=(u+v)+w$, para u, v e w em V

c) Há um elemento neutro o em V tal que:
$u + o = o + u = u$, para todo u em V

d) Para todo u em V, há um elemento simétrico –u em V tal que:
$u + (-u) = o$

2ª) Se u é qualquer elemento de V e v é qualquer número real, então .u está em V, isto é, V é fechado em relação à multiplicação.

a) $\alpha (u+v)= \alpha .u + \alpha .v$, para todos os números reais α e todos u e v em V.

b) $(c+d).u= c.u+d.u$, para todos os números reais c e d e todo u em V.

c) $c.(d.u)=(c.d).u$, para todos os números reais c e d e todo u em V.

d) $1.u = u$, para todo u em V.

TEOREMAS BÁSICOS DE UM ESPAÇO VETORIAL

Considerando V um espaço vetorial sobre um corpo K, temos os seguintes teoremas:

Para qualquer escalar $k \in K$ e $0 \in V$, $k0=0$

a) Para $0 \in K$ e qualquer vetor $u \in V$, $0u=0$

b) Se $ku=0$, para $k \in K$ e $u \in V$, então $k=0$ ou $u=0$

c) Para qualquer $k \in K$ e qualquer $u \in V$, $(-k)u=k(-u)=-ku$

Onde: K → o corpo dos escalares

Exercícios:

1) Sendo R e S subespaços dados por: $R=\{(x,0,0) \in R^3\}$ e $S=\{(x,y,z) \in R^3 \mid x=0 \text{ e } z=0\}$, determine R + S.

Resolução:

Como $S=\{(x,y,z) \in R^3 \mid x=0 \text{ e } z=0\}$, podemos escrever que $S=\{(0,y,0) \in R^3\}$ e daí teremos:

$R+S = \{u \in R^3 \mid u=r+s \text{ com } r \in R \text{ e } s \in S\}$

$r \in R \rightarrow u=(x,0,0)$

$s \in S \rightarrow s=(0,y,0)$

Então, $u=r+s=(x,0,0)+(0,y,0)=(x,y,0)$

Portanto, $R+S=\{(x,y,0) \in R^3\}$

2) Sendo $R=\{(x,0,z)\in R^3\}$ e $S=\{(a,b,0)\in R^3\}$, determine R+S

Resolução:

$R+S=\{u \in R^3 \mid u=r+s \text{ com } r\in R \text{ e } s\in S\}$

Fazendo:
$r\in R\rightarrow$ $u=(x,0,z)$
$s\in S\rightarrow$ $s=(a,b,0)$

Então, teremos:

$u=r+s=(x,0,z)+(a,b,0)=(x+a,0+b,z+0)= (x+a,b,z)$

Logo: $R+S= \{(x+a,b,z)\in R^3\}$

INDICAÇÃO DE LEITURA COMPLEMENTAR

KOLMAN, Bernard HILL, David R. **Introdução à Álgebra linear com aplicações**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

BOLDRINI, José Luiz. **Álgebra linear**. São Paulo: Harbra, 2006.

PARA REFLETIR

Em meados do século dezessete foi materializada explicitamente a ideia de utilizar pares de números para situar pontos no plano e ternos de números para situar pontos no espaço tridimensional. Faça uma breve pesquisa sobre os matemáticos Augustin Louis Cauchy e Herman Armandus Schwarz. Agora, vamos refletir: A utilização de pares de números na utilização de um plano é aplicada na elaboração de algoritmos na computação? Qual a relação existente entre essas aplicações?

3.3 Combinações lineares

Sejam V um espaço vetorial sobre um corpo K e $v_1,v_2,...v_m, \in V$.

Qualquer vetor V da forma $a_1v_1+a_2v_2+...+a_mv_m$, onde i $\in$ K é chamado uma combinação linear de $v_1,v_2,...,v_m$.

O conjunto de todas essas combinações lineares, denotado por $\langle v_1,v_2,...,v_m \rangle$ ou ger($v_1,v_2,..., v_m$) é chamado espaço gerado por $v_1,v_2,..., v_m$.

Os vetores R^3 são combinações lineares de i, j e k. Cada vetor V=(a,b,c) em R^3, pode ser escrito como uma combinação linear dos vetores da base canônica

i=(1,0,0), j=(0,1,0) e k=(0,0,1), pois
V=(a,b,c)=a(1,0,0)+b(0,1,0)+c(0,0,1)=ai+bj+ck

Exemplos:

1) Expresse **V**=(1,-2,5) em R^3 como uma combinação linear dados os vetores v_1,v_2,v_3, onde =(1,-3,2), =(2,-4,-1) e =(1,-5,7).

Resolução:

Como o vetor V está em R^3, vamos considerar x, y e z, assim:

$V= xv_1 + yv_2 +zv_3$.

Então:

(1,-2,5) = x(1,-3,2) + y(2,-4,-1) + z(1,-5,7) ou

(1,-2,5) = (x+2y+z , -3x-4y-5z , 2x-y+7z)

Igualando os elementos, formaremos o sistema:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ -3x - 4y - 5z = -2 \\ 2x - y + 7z = 5 \end{cases}$$

Reduzindo à forma escalonada, temos:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2y - 2z = 1 \\ -5y + 5z = 3 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x + 2y + z = 1 \\ 2y - 2z = 1 \\ 0 = 11 \end{cases}$$

O sistema não tem solução. Assim, V não é combinação linear de v_1, v_2, v_3.

2) Em R^3, sejam $v_1=(1,2,1)$, $v_2=(1,0,2)$ e $v_3=(1,1,0)$.

Verificar se o vetor V=(2,1,5) é uma combinação linear de v_1, v_2 e v_3.

Resolução:

Partindo do mesmo princípio adotado no exercício anterior, sejam x, y e z coordenadas de V em R^3.

Assim, $V = xv_1+yv_2+zv_3$ ou

(2,1,5) = x(1,2,1) +y(1,0,2) +z(1,1,0) ou

(2,1,5) = (x+y+z, 2x+0y+z, x+2y+0z) ou

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ 2x + z = 1 \\ x + 2y = 5 \end{cases}$$

Resolvendo o sistema, pela regra de Cramer, temos:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1.0.0+1.1.1+2.2.1-1.0.1-1.1.2-1.2.0$$

$$\Delta = 0 + 1 + 4 - 0 - 2 - 0 \rightarrow \Delta = 3 \rightarrow \Delta \neq 0$$

$$\Delta x = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix} = 2.0.0+1.1.5+1.2.1-1.0.5-2.1.2-1.1.0$$

$$\Delta x = 0+5+2-0-4-0 \rightarrow \Delta x=7-4 \rightarrow \Delta x=3$$

$$\Delta y = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix} = 1.1.0+2.1.1+1.2.5-1.1.1-1.1.5-2.2.0$$

$$\Delta y = 0+2+10-1-5-0 \rightarrow \Delta y=12-6 \rightarrow \Delta y=6$$

$$\Delta z = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 5 \end{bmatrix} = 1.0.5+1.1.1+2.2.2-2.0.1-1.1.2-1.2.5$$

$$\Delta z = 0+1+8-0-2-10 \rightarrow \Delta z=9-12 \rightarrow \quad \Delta z=-3$$

Então:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{3}{3} \rightarrow x = 1$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{6}{3} \rightarrow y=2$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{-3}{3} \rightarrow z=-1$$

Portanto, V(2,1,5) é uma combinação linear de
(2,1,5) = 1 (1,2,1) + 2 (1,0,2) – 1 (1,1,0)

3) Escreva a matriz $E = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ como uma combinação das matrizes $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ e $C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Resolução:

Seja a equação xA + YB + zC = E ou

$$x\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} x & x \\ x & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ y & y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 2z \\ 0 & -z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} x+0+0 & x+0+2z \\ x+y+0 & 0+y-z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ ou}$$

$$\begin{bmatrix} x & x+2z \\ x+y & y-z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ ou}$$

x=3
x+2z=1 → 3+2z=1 → 2z=1-3 → 2z=-2 → z=-1
x+y=1 → 3+y=1 → y=1-3 → y=-2

Então, E = 3A -2B - C

4) Verificar se o vetor V=(1,1,0) é uma combinação linear dos vetores u=(4,2,-3), v=(2,1,-2) e w=(-2,1,0).

Resolução:

Consideremos a equação V = xu+yv+zw ou

(1,1,0) = x(4,2,-3) +y(2,1,-2)+z(-2,1,0) ou

(1,1,0) = (4x,2x,-3x) + (2y,y,-2y) + (-2z,z,0) ou

(1,1,0) = (4x+2y-2z, 2x+y+z,-3x-2y) ou

$$\begin{cases} 4x + 2y - 2z = 1 \\ 2x + y + z = 1 \\ -3x - 2y = 0 \end{cases}$$

O sistema tem solução, pois o determinante dos coeficientes do sistema é ≠ 0.

Pelo método do escalonamento ou pela regra de Cramer, teremos:

$x=\frac{3}{2}$, $y=\frac{-9}{4}$ e $z=\frac{1}{4}$

Logo, a equação será : $\frac{3}{2}u + \frac{-9}{4}v + \frac{1}{4}w = V$

INDICAÇÃO DE LEITURA COMPLEMENTAR

POOLE, David. **Álgebra linear.** São Paulo: Cengage Learning, 2003.

O aluno deverá consultar o capítulo 1 sobre vetores, que contém diversos exercícios complementando a teoria apresentada aqui.

BOLDRINI, José Luiz. **Álgebra linear**. São Paulo: Harbra, 2006.

PARA REFLETIR

Neste tópico os exercícios resolvidos demonstram a necessidade de conhecimento profundo na resolução de sistemas de equações e determinantes. Retorne ao estudo destes, caso não tenha segurança e/ ou já tenha esquecido dos passos na solução.

Agora, vamos refletir: Vetores aplicados na elaboração de algoritmos são os mesmos vetores aplicados nas combinações lineares? Qual a sua relação existente para a computação?

3.4 Subespaços vetoriais

Sejam V um espaço vetorial e S um subconjunto não-vazio de V.

S é um subconjunto de V, se S é um espaço vetorial em relação à adição e à multiplicação por escalar definidas em V.

Teorema: Um subconjunto S não-vazio, de um espaço vetorial V, é um subespaço vetorial de V, se estiverem satisfeitas as seguintes condições:

a) Para todo u e v pertencente a S, então:
$(u+v) \in S$

b) Para todo pertencente a R e u pertencente a S, então:
$\alpha u \in S$

Observação:

Todo espaço vetorial V admite pelo menos dois subespaços vetoriais: o subespaço nulo {0} e o próprio espaço vetorial V.

Estes subespaços são chamados subespaços triviais.

Os demais subespaços, se existirem, são chamados subespaços próprios.

Exemplos:

1) Sejam $V=R^2$ e $S=\{(x,y) \in R^2 \mid y=2x\}$. Mostre que S é um subespaço vetorial de V.

Resolução:

$S \neq \emptyset$, pois $(0,0) \in S$

b) Sejam $u,v \in S \rightarrow (u+v) \in S$? De fato:
Se $u \in S \rightarrow u=(x_1,2y_1)$
Se $v \in S \rightarrow v=(x_2,2y_2)$

Logo, $u+v = (x_1, 2y_1) + (x_2, 2y_2)$
$u+v = (x_1+x_2 , 2y_1+2y_2)$
$u+v = (x_1+x_2 , 2(y_1+y_2))$

Assim, $(u+v) \in S$, pois a segunda componente é o dobro da primeira.

a) $\forall \alpha \in R$ e $u \in S \rightarrow \alpha u \in S$? De fato:
$\alpha u = \alpha(x_1, 2y_2) = (\alpha x_1 , 2\alpha y_1) \in S$

Então, S é um subespaço vetorial de V.

2) Considere $V=R^2$ e $S = \{(x,4-2x)\ R \in \mid x \in R\}$. Mostre que S é um subespaço vetorial de V.

Resolução:

a) $S = \emptyset$ pois $(0,2) \in S$

b) Se $u=(1,2) \in S$ e $v=(0,4) \in S$, então
$u+v = (1,2)+(0,4) = (1,6)\ S$

c) $\alpha u \in S$, se $\alpha \neq 1$

Logo, S não é um subespaço de V.

3) Seja $V=R^5$ e $W=(0,x_2,x_3,x_4,x_5)$, W é um subespaço vetorial de V.

Resolução:

Seja $u=(0,x_2,x_3,x_4,x_5) \in W$ e $v=(0,y_2,y_3,y_4,y_5) \in W$, então, verificando as condições de subespaço:

a) $u+v= (0, x_2,x_3,x_4,x_5) + (0, y_2,y_3,y_4,y_5)$
$u+v= (0, x_2+y_2, x_3+y_3, x_4+y_4 , x_5+y_5) \in W$

b) $\alpha u = \alpha(0, x_2, x_3, x_4, x_5) = (0, x_2, x_3, x_4, x_5) \in W$

Então, w é um subespaço vetorial de V.

4)Verifique se $V=\{(x,y,z,w) \in R^4 \mid y=x \text{ e } z=w^2\}$ com as operações de R^4 é um espaço vetorial.

Resolução:

Note que (0,0,1,1) V mas -1(0,0,1,1)=(0,0,-1,-1)não V.

Assim, V não é um espaço vetorial.

5) Verificar se $S=\{(x,y,z) \in R^3 \mid x+y+z=0\}$ é um subespaço vetorial de R^3 .

Resolução:

a) (0,0,0) satisfaz $x+y+z=0$

b) Se $(x,y,z) \in S$ e $(u,v,w) \in S$, então:
$(x+u) + (y+v) + (z+w)=((x+y+z) + (u+v+w)=0$ e, portanto, $(x,y,z) + (u,v,w)$ S.

c) Se $(x,y,z) \in S$ então $\alpha x+ \alpha y+ \alpha z = \alpha(x+y+z)=0$ para qualquer $\alpha \in R$.
Assim, $\alpha\,(x,y,z) \in S$

Logo, S é um subespaço vetorial de R^3.

INDICAÇÃO DE LEITURA COMPLEMENTAR

POOLE, David. **Álgebra linear**. São Paulo: Cengage Learning, 2003.

STRANG, Gilbert. **Álgebra linear e suas aplicações**. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

PARA REFLETIR

Sugerimos que o aluno, neste momento, faça as listas de exercícios disponibilizadas no AVA referentes a este conteúdo.

Agora, vamos refletir: Um subespaço vetorial pode ser aplicado na construção de um algoritmo com vetores? Esse algoritmo permite a execução de um subvetor na manipulação de dados de um programa?

RESUMO

Neste tema aprendemos a escrever um vetor nas formas vetorial e matricial, os axiomas do espaço vetorial, as combinações lineares e os subespaços vetoriais. É importante ficar claro as propriedades referentes a um espaço e subespaço vetorial.

4 Transformações lineares

Neste tema nós vamos definir e estudar transformações lineares de um espaço vetorial arbitrário V em outro espaço vetorial arbitrário W.

4.1 Conceitos básicos e exemplos de transformações lineares

Sejam V e W dois espaços vetoriais. Para dizer que T é uma transformação do espaço vetorial V no espaço vetorial W, escreve-se:

$T: V \rightarrow W$

Sendo T uma função, cada vetor $v \in V$ tem uma só imagem $w \in W$, que será indicado por T(v).

Uma transformação $T: V \rightarrow W$ é chamada transformação linear se:

a) $T(u+v) = T(u) + t(v)$, para todo u e v de V.
b) $T(\alpha u) = \alpha T(u)$, para todo α de R e todo u de V.

Exemplos de Transformações lineares:

1) Sejam $V=R^2$ e $W=R^3$. Uma transformação $T: R^2 \rightarrow R^3$, associa vetores $v=(x,y) \in R^2$ com vetores $w= (x, y, z) \in R^3$.

2) $T: R^2 \rightarrow R^3$, definida por $T(x,y)=(3x, -2x, x-y)$ é uma transformação linear.

Resolução:

a) Sejam $u=(x_1,y_1)$ e $v=(x_2,y_2)$ em R^2. Então, vamos determinar , T(u+v).

$T(u+v)= T(x_1+x_2, y_1+y_2)$
$= (3 (x_1+x_2), -2 (y_1+y_2), (x_1+x_2) - (y_1+y_2))$
$= (3x_1 + 3x_2,- 2y_1 - 2y_2, x_1 + x_2 - y_1 - y_2)$
$= (x_1- 2y_1, x_1 - y_1) + (3x_2 - 2y_2, x_2 - y_2)$
$= T(x_1,y_1) + T(x_2,y_2)$
$= T(u) + T(v)$

Logo, $T(u+v) = T(u) + T(v)$

b) $T(\alpha u) = T\alpha(x_1,y_1) = T(\alpha x_1,\alpha y_1)$
$= (3(\alpha x_1), -2(\alpha y_1), \alpha x_1-\alpha y_1)$
$= (\alpha(3x_1), -\alpha(2y_1), \alpha(x_1-y_1))$
$= \alpha (3x_1, -2y_1, x_1 - y_1)$
$= \alpha T(u)$

Portanto, T é uma transformação Linear.

3) Verifique quais das transformações abaixo são lineares.

a) $T:R^2 \rightarrow R^2$, definida por $T(x,y)=(2x-y,0)$

Resolução:

- Sejam $u=(x_1,y_1)$ e $v=(x_2,y_2) \in R^2$.

Então:

$$T(u+v) = (x_1,y_1) + (x_2, y_2) = (x_1+x_2, y_1+ y_2)$$
$$= (2(x_1+x_2) - (y_1+ y_2), 0)$$
$$= (2x_1 + 2x_2 - y_1 - y_2, 0)$$
$$= (2x_1 - y_1 + 2x_2 - y_2, 0)$$
$$= (2x_1 - y_1, 0) + (2x_2 - y_2, 0)$$
$$= T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2)$$
$$= T(u) + T(v)$$

- Seja $k \in R$

$$T(ku) = T(kx_1, ky_1) = T(2kx_1 - ky_1, 0) = k(2x_1 - y_1, 0)$$
$$= k\,T(x_1, y_1)$$
$$= k\,T(u)$$

Logo, T é uma Transformação Linear

b) T: $R^3 \rightarrow R^2$, definida por T(x,y,z) = T(x-1 , y+2)

Resolução:

$T(0,0,0) = (-1,0) \neq 0$
Logo, T não é uma Transformação Linear

c) T: $R \rightarrow R^3$, definida por T(x) =t(x, 2x, -x)

Resolução:

- Sejam x_1 e $x_2 \in R$

Então:

$$\begin{aligned} T(x_1 + x_2) &= (x_1 + x_2 \ , 2(x_1 + x_2) \ , - (x_1 + x_2)) \\ &= (x_1 + x_2 \ , 2x_1 + 2x_2 \ , -x_1 - x_2) \\ &= (x_1 \ , 2x_1 \ , -x_1) + (x_2 \ , 2x_2 \ , - x_2) \\ &= T(x_1) + T(x_2) \end{aligned}$$

- Seja $k \in R$

Então:

$$\begin{aligned} T(kx_1) &= (kx_1 \ , 2kx_1 \ , -kx_1) \\ &= k(x_1 \ , 2x_1 \ , -x_1) \\ &= kT(x_1) \end{aligned}$$

Logo, T é uma Transformação Linear

d) $T:R^2 \rightarrow R^2$, definida por $T(x,y) = (y,x^3)$

Resolução:

- Sejam $u=(x^1, y^1)$ e $v=(x^2, y^2) \in R^2$

Então:

$$T(u+v) = T(\ (x_1,y_1)\ ,\ (x_2,y_2)\ )$$
$$= T(\ x_1+x_2\ ,\ y_1+y_2)$$
$$=(y_1+y_2\ ,\ (x_1+x_2)^3\ )$$
$$= (y_1+y_2\ ,\ x_1^3\ +3x_1^2.x_2+3x_1.x_2^2\ +\ x_2^3\ )$$
$$= (y_1,\ x_1^3\ )+(y_2,x_2^3)+(0,3x_1^2.x_2)\ +(0,\ 3x_1.x_2^2)$$
$$=T(x_1,y_1)+T(x_2,y_2)+T(\sqrt{3x_1^2}.x_2\ ,0)\ +T(\sqrt{3x_1}x_2^2\ ,\ 0)$$
$$\neq T(u)\ +T(v)$$

Logo, T não é uma transformação Linear.

4) Determine a matriz da transformação de cada uma das seguintes transformações lineares, considerando a base canônica.

a) $T:R^2 \rightarrow R^2$ e $T(x,y) = (2x-y\ ,\ 0)$
b) $T:R^2 \rightarrow R^2$ e $T(x,y) = (2x-y\ ,\ x)$
c) $T:R^3 \rightarrow R^3$ e $T(x,y,z) = (2x-y,\ 0,\ y+z)$
d) $T:R^3 \rightarrow R^3$ e $T(x,y,z) = (0,0,y)$

Resolução:

Consideremos a base canônica para R^2, $\{e_1=(1,0), e_2=(0,1)\}$, e para R^3, $\{e_1 =(1,0,0),=(0,1,0), e_3=(0,0,1)\}$.

a) $T(e_1) =T(1,0) = (2,0) = 2\ e_1 + 0.e_2$
$T(e_2) =T(0,1) = (-1,0) = (-1).\ e_1 + 0.\ e_2$

A matriz de transformação A, será uma matriz do tipo 2x2, cujas colunas são as coordenadas de $T(e_i)$ na base $\{e_i\}$.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) $T(e_1) = T(1,0) = (2,1) = 2\, e_1 + 1.\, e_2$
$T(e_2) = T(0,1) = (-1,0) = (-1).\, e_1 + 0.\, e_2$

A matriz de transformação B, será uma matriz do tipo 2x2, cujas colunas são as coordenadas de $T(e_i)$ na base $\{e_i\}$.

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

c) $T(e_1) = T(1,0,0) = (2,0,0) = 2\, e_1 + 0.\, e_2 + 0.\, e_3$
$T(e_2) = T(0,1,0) = (-1,0,1) = (-1).\, e_1 + 0.\, e_2 + 1.\, e_3$
$T(e_3) = T(0,0,1) = (0,0,1) = 0.\, e_1 + 0.\, e_2 + 1.\, e_3$

A matriz de transformação C será uma matriz do tipo 3x3, cujas colunas são as coordenadas de $T(e_i)$ na base $\{e_i\}$.

$$C = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

d) $T(e_1) = T(1,0,0) = (0,0,0) = 0\, e_1 + 0.\, e_2 + 0.\, e_3$
$T(e_2) = T(0,1,0) = (0,0,1) = 0.\, e_1 + 0.\, e_2 + 1.\, e_3$
$T(e_3) = T(0,0,1) = (0,0,0) = 0.\, e_1 + 0.\, e_2 + 0.\, e_3$

A matriz de transformação D será uma matriz do tipo 3x3, cujas colunas são as coordenadas de $T(e_i)$ na base $\{e_i\}$.

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

INDICAÇÃO DE LEITURA COMPLEMENTAR

POOLE, David. **Álgebra linear**. São Paulo: Cengage Learning, 2003.

BOLDRINI, José Luiz. **Álgebra linear**. São Paulo: Harbra, 2006.

PARA REFLETIR

Faça uma breve pesquisa sobre a importância das transformações lineares para a área de computação e quais os softwares disponíveis para a resolução dessas atividades.

Agora, vamos refletir: As transformações lineares permitem ajudar na elaboração de matrizes na elaboração de algoritmos?

4.2 Dependência e independência linear

DEFINIÇÃO

Seja V um espaço vetorial e A = $\{v_1, v_2, v_3,...,v_n\} \subset V$.

Consideremos a equação $a_1v_1+...,+ a_nv_n =0$ (1)

Sabemos que a equação (1) , admite pelo menos uma solução: $a_1=0$, $a_2=0$, ..., $a_n=0$, chamada solução trivial.

O conjunto A diz-se linearmente independente (LI), ou os vetores $v_1,..., v_n$ são LI, caso a equação (1) admita apenas a solução trivial.

Se existirem soluções $a_1 \neq 0$, diz-se que o conjunto A é linearmente dependente (LD), ou os vetores $v_1 ,...,v_n$ são LD.

Exemplos:

1) No espaço vetorial V = R^3, os vetores $v_1=(2,-1,3)$, $v_2=(-1,0,-2)$ e $v_3=(2,-3,1)$ formam um conjunto linearmente independente, pois $3v_1+4v_2-v_3=0$ ou seja 3(2,-1,3) +4(-1,0,-2) – (2,-3,1)=(0,0,0).

2) No espaço vetorial V= R^4 , os vetores $v_1 =(2,2,3,4)$, $v_2=(0,5,-3,1)$, $v_3=(0,0,4,-2)$ são linearmente independentes?

Resolução:

Façamos:

a(2,2,3,4) +b(0,5,-3,1) + c(0,0,4,-2) = (0,0,0)
(2a,2a,3a,4a)+(0,5b,-3b,b)+(0,0,4c,-2c)=(0,0,0)
(2a,2a+5b,3a-3b+4c, 4a+b-2c) = (0,0,0)

Igualando os elementos, temos:

$$\begin{cases} 2a = 0 \\ 2a + 5b = 0 \\ 3a - 3b + 4c = 0 \\ 4a + b - 2c = 0 \end{cases}$$

O sistema admite unicamente a solução a=b=c=o, denominada solução trivial.

Portanto, os vetores são linearmente independentes.

3) No espaço vetorial R^3, o conjunto $\{e_1, e_2, e_3\}$, tal que $e_1=(1,0,0)$, $e_2=(0,1,0)$ e $e_3=(0,0,1)$ é linearmente independente?

Resolução:

Consideremos a equação $a_1 e_1 + a_2 e_2 + a_3 e_3 = 0$ ou
$a_1(1,0,0) + a_2(0,1,0) + a_3(0,0,1) = (0,0,0)$ ou
$(a_1, a_2, a_3) = (0,0,0)$ ou $a_1 = a_2 = a_3 = 0$
Logo o conjunto $\{e_1, e_2, e_3\}$ é LI.

4) No espaço vetorial R^3, os vetores $e_1=(1,0)$ e $e_2=(0,1)$ são linearmente independentes. No entanto, os vetores e_1, e_2 e $v=(a,b)$ são LD.

Resolução:

Sejam :

$x(1,0) + y(0,1) + z(a,b) = (0,0)$
$(x,0) + (0,y) + (az,bz) = (0,0)$
$(x+az, y+bz) = (0,0)$

O sistema admite ao menos uma solução não-trivial.

Por exemplo, fazendo z=1, vem x= -a e y= -b

Então, $-ae_1 - be_2 + v = 0$

5) No espaço vetorial M(2,2), o conjunto

$$A=\left\{ \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \right\} \text{ é LD.}$$

Resolução:

Seja a equação $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0$ ou

$$a_1 \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ou}$$

$$\begin{bmatrix} -a_1 + 2a_2 + 3a_3 & 2a_1 - 3a_2 - 4a_3 \\ -3a_1 + 3a_2 + 3a_3 & a_1 + a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Podemos, então, formar o sistema:

$$\begin{cases} -a_1 + 2a_2 + 3a_3 = 0 \\ 2a_1 - 3a_2 - 4a_3 = 0 \\ -3a_1 + 3a_2 + 3a_3 = 0 \\ a_1 + a_3 = 0 \end{cases}$$

cuja solução é $a_1 = -a_3$ e $a_2 = -2a_3$. Como existem soluções $a_1 \neq 0$, para $a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 = 0$ o conjunto é LD.

TEOREMA

Um conjunto $A=\{v_1,\ldots,v_n\}$ é LI se, e somente se, nenhum desses vetores for combinação linear dos outros.

Exemplos:

1) $v_1 = (1,-2,3)$ e $v_2 = (2,1,5)$ são LI, pois $v_1 \neq k\, v_2$, para todo $k \in R$.

2) $v_1 = (1,-2,3)$ e $v_2 = (2,-4,6)$ são LD, pois $v_2 = 2\, v_1$

3) Verificar se são LI ou LD os seguintes conjuntos:

a) $\{(2,-1),(1,3)\} \subset R^2$

b) $\{(-1,-2,0,3),(2,-1,0,0),(1,0,0,0)\} \subset R^4$

c) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 6 \\ -12 & 9 \end{bmatrix} \right\} \subset M(2,2)$

Resolução:

a) Tendo em vista que um vetor não é múltiplo escalar do outro, o conjunto é Li.

Vejamos:

a(2,-1)+b(1,3)=(0,0) ou

(2a,-a) + (b,3b) =(0,0) ou

(2a+b , -a+3b)=(0,0) ou

$$\begin{cases} 2a + b = 0 \\ -a + 3b = 0 \end{cases}$$

O sistema admite somente a equação trivial, o que vem a confirmar ser o conjunto LI.

b) Consideremos a equação

a(-1,-2,0,3)+b(2,-1,0,0)+c(1,0,0,0)=(0,0,0,0)

Portanto,

$$\begin{cases} -a + 2b + c = 0 \\ -2a - b = 0 \\ 3a = 0 \end{cases}$$

Como o sistema admite apenas a solução trivial, ou seja a=b=c=0, o conjunto é LI.

c) O conjunto tem apenas dois vetores, sendo um deles múltiplo escalar do outro (o segundo vetor é o triplo do primeiro), o conjunto é LD.

4) Verifique se a sequência (1,1,1),(1,1,0),(1,0,0) é linearmente independente em R^3.

Resolução:

É necessário verificar quais são as possíveis soluções de x(1,1,1)+y(1, 1,0)+z(1,0,0)=(0,0,0)

Isto equivale ao sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ x + y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

que possui como única solução x=y=z=0. Logo, a sequência é LI.

5) Verifique se as matrizes $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ são linearmente independentes em $M_2(R)$.

Resolução:

Vamos obter as soluções de

$$x\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+y\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+z\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que equivale a

$$\begin{pmatrix} x + y & y + z \\ 0 & x + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

que possui como solução (x,y,z)=(x,-x,x) para qualquer $x \in R$.

Dessa forma, a sequência de matrizes dada é linearmente independente, bastando tomar, por exemplo, x=1,y= -1 e z=1.

INDICAÇÃO DE LEITURA COMPLEMENTAR

POOLE, David. **Álgebra linear.** São Paulo: Cengage Learning, 2003.

STRANG, Gilbert. **Álgebra linear e suas aplicações.** São Paulo: Cengage Learning, 2010.

PARA REFLETIR

Sugerimos que o aluno faça as listas de exercícios disponibilizados no AVA referentes a este conteúdo.

Agora, vamos refletir: As dependências lineares são oriundas do teorema de conjuntos e subconjuntos da matemática? Existe similaridades na aplicação matemática desses teoremas?

4.3 Base e dimensão

BASE DE UM ESPAÇO VETORIAL

Um conjunto $B=\{v_1,...,v_n\}$ V é uma base do espaço vetorial V se:

I) B é LI

II) B gera V

Exemplos:

1) B = { (1,1) , (-1,0) } é base de R^2?

Resolução:

I) B é LI, pois a(1,1) + b(-1,0)=(0,0) ou

(a-b,a)=(0,0) ou resolvendo o sistema

$\begin{cases} a - b = 0 \\ a = 0 \end{cases}$, então a=b=0

II) B gera R^2, pois para todo $(x,y) \in R^2$, tem=se:

(x,y) = a(1,1) +b(-1,0) ou

(x,y) = (a,a) + (-b,0) ou

(x,y) = (a-b,a) ou

$$\begin{cases} a - b = x \\ a = y \end{cases}$$

Logo, a=y e b=y-x

Então, (x,y) = y(1,1) + (y-x)(-1,0)

2) B={(1,0),(0,1)} é base de R^2, denominada base canônica.

Resolução:

I) B é LI, pois a(1,0)+b(0,1) = (0,0), teremos que a=b=0
II) B gera R^2, pois todo vetor (x,y) $\in R^2$ é tal que (x,y) = x(1,0) + y(0,1)

3) B={ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ } é a base canônica de M(2,2) ?

Resolução:

Seja a equação $ae_1+be_2+ce_3+de_4= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ou

$$a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} +b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} +c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} +d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$ ou

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Por igualdade de matrizes, temos:

a=b=c=d=0

Então, B é LI

Por outro lado, B gera o espaço M(2,2), pois qualquer matriz $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in$ M(2,2) podendo ser escrito assim:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} +b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} +c\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} +d\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo, B é base de M(2,2)

4) Mostrar que os vetores de B={(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)} formam uma base de R^3.

Resolução:

Podemos, facilmente, ver que os vetores são LI e que todo (x,y,z) $\in$ R^3 se escreve como (x,y,z)=x(1,0,0)+y(0,1,0)+z(0,0,1).

Logo, B é uma base de R^3.

DIMENSÃO DE UM ESPAÇO VETORIAL

Seja V um espaço vetorial. Se V possui uma base com n vetores, então V tem dimensão n e anota-se dim V = n.

Se V tem uma base com infinitos vetores, então a dimensão de V é infinita e anota-se dim V = ∞ .

Exemplos:

1) dim M(m,n) = mxn
2) dim M(2,2) = 2x2=4
3) dim R^n= n
4) dim {0} = 0
5) dim Pn = n+1

Exercícios resolvidos:

1) O conjunto B={(2,1),(-1,3)} é uma base de R^2?

Resolução:

Como dim R^2 =2 e os vetores dados são LI (pois nenhum vetor é múltiplo escalar do outro), eles formam uma base do R^2.

2) Sejam os vetores v_1=(1,2,3), v_2=(0,1,2) e v_3=(0,0,1). Mostrar que o conjunto B={v_1, v_2, v_3} é uma base de R^3.

Resolução:

Para provar que B é LI, deve-se mostrar que a equação $a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3=0$ admite somente a solução $a_1=a_2=a_3=0$.

Com efeito,

$a_1(1,2,3) + a_2(0,1,2) + a_3(0,0,1)=(0,0,0)$

equivale ao sistema:

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ 2a_1 + a_2 = 0 \\ 3a_1 + 2a_2 + a_3 = 0 \end{cases}$$

cuja única solução é a trivial: $a1=a2=a3=0$.

Portanto, B é LI.

Para mostrar que B gera o R^3, deve-se mostrar que qualquer vetor $v=(x,y,z) \in R^3$ pode ser expresso como uma combinação dos vetores de B.

$v=a_1v_1+a_2v_2+a_3v_3=0$ ou

$(x,y,z)= a_1(1,2,3) + a_2(0,1,2) + a_3(0,0,1)$ ou

$$\begin{cases} a_1 = x \\ 2a_1 + a_2 = y \\ 3a_1 + 2a_2 + a_3 = z \end{cases}$$

sistema esse que admite solução para quaisquer valores de x,y,z, ou seja, todo vetor v=(x,y,z) é combinação linear dos vetores de B.
Resolvendo o sistema encontramos:

$a_1=x$, $a_2= -2x+y$ e $a_3=x-2y+z$

isto é:

$(x,y,z)=x(1,2,3)+ (-2x+y)(0,1,2)+ (x-2y+z)(0,0,1)$
Satisfeitas as duas condições de base, mostramos que B é base de R^3.

3) Determinar a dimensão e uma base do espaço vetorial
$S=\{(x,y,z) \in R^3 \mid 2x+y+z=0\}$.

Resolução:

Na equação $2x+y+z=0$, vamos isolar z, tem-se $z=-2x-y$ (1), onde x e y são as variáveis livres. Qualquer vetor (x,y,z) pertencente a S tem a forma (x, y, -2x-y) e, portanto, podemos escrever:

$(x,y,z)=(x, y, -2x-y)$ ou
$(x,y,z)=(x,0,-2x)+(0,y,-y)$ ou
$(x,y,z)=x(1,0,-2)+y(0,1,-1)$

Isto é, todo vetor de S é uma combinação linear dos vetores (1,0,-2) e (0,1,-1).Como esses dois vetores geradores de S são LI, o conjunto {(1,0,-2),(0,1,-1)} é uma base de S e, consequentemente, dim S=2.

Por outro lado, tendo em vista que a cada variável livre corresponde um vetor da base na igualdade (1), conclui-se que o número de variáveis livres é a dimensão do espaço.

Na prática, podemos adotar uma maior simplificação para determinar uma base de um espaço. Para esse mesmo espaço vetorial S, onde $z=-2x-y$, temos:
para $x=1$ e $y=1$, vem $z=(-2).1-1=-2-1=-3$ ou $v_1=(1,1,-3)$

para $x=-1$ e $y=2$, vem $z=(-2)(-1)-2=2-2=0$ ou $v_2=(-1,2,0)$ e o conjunto {(1,1,-3),(-1,2,0)} é outra base de S.

Na verdade, esse espaço S tem infinitas bases, porém todas elas com dois vetores.

INDICAÇÃO DE LEITURA COMPLEMENTAR

POOLE, David. **Álgebra linear** São Paulo: Cengage Learning, 2003.

STRANG, Gilbert. **Álgebra linear e suas aplicações.** São Paulo: Cengage Learning, 2010.

PARA REFLETIR

Analise a expressão abaixo e em seguida reflita:

A unicidade da representação em Base, de $S = \{v1, v2, ..., vn\}$ é uma base de um espaço vetorial V, onde cada vetor em V pode ser expresso na forma $v=c1,v1+c2v2+...+cnvn$ de uma única maneira? Com base no espaço vetorial, é possível obter resultado nessa aplicação de vetor?

4.4 Noções de Espaço Vetorial com produto interno

Chama-se produto interno no espaço vetorial V, uma função de V x V em R, que a todo par de vetores (u,v) V x V associa um número real, indicado por u.v ou ‹u,v›, tal que os seguintes axiomas sejam verificados:

P_1) u.v=v.u
P_2) u(v+w) = u.v+u.w
P_3) $(\alpha u).v= \alpha(u.v)$ para todo α real
P_4) $u.v \geq o$ e u.v=o se, e somente se, u=o

Observações:

a) O número real u.v é chamado produto interno dos vetores u.v.
b) Dos quatro axiomas da definição decorrem as propriedades;

I) o.u=u.o=o, para todo $u \in V$
II) (u+v).w=u.w+v.w
III) $u(\alpha v)=\alpha(u.v)$
IV) $u(v_1+v_2+...,v_n)=u\ v_1+u\ v_2+...,u\ v_n$

Exemplo:

1) No espaço vetorial $V=R^2$, a função que associa a cada par de vetores $u=(x_1, y_1)$ e $v=(x_2, y_2)$ o número real u.v=3+4 é um produto interno.

Resolução:

Vamos aplicar os axiomas da definição:

P_1) $u.v=3x_1x_2+4y_1y_2$
$u.v=3x_2x_1+4y_2y_1$
$u.v=v.u$

P_2) Se $w=(x_3,y_3)$, então:
$u(v+w)=(x_1,y_1)(x_2+x_3,y_2+y_3)$
$u(v+w)=3x_1(x_2+x_3)+ 4y_1(y_2+y_3)$
$u(v +w)=(3x_1x_2+4y_1y_2)+(3x_1x_3+4y_1y_3)$
$u(v+w)=u,v+u,w$

P_3) $(\alpha u).v=(\alpha x_1,\alpha y_1).(x_2,y_2)$
$(\alpha u).v=3(\alpha x_1).x_2 +4(\alpha y_1).y_2$
$(\alpha u).v=\alpha(3x_1x_2+4y_1y_2)$
$(\alpha u).v = \alpha(u.v)$

P_4) $u,v=3x_1x_1+4y_1y_1= 3x_1^2 +4y_1^2 \geqslant 0$ e $u.v=3x_1^2 + 4y_1^2= 0$ se, e somente se, $x_1=y_1=0$, isto é se $u=(0,0)=0$.

2) Se $u=(x_1, y_1,z_1)$ e $v=(x_2, y_2, z_2)$ são vetores quaisquer do R^3, o número real $u.v=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$, define um produto interno no R^3 .

Resolução:

De forma análoga $u.v=x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3$ com $u=(x_1,x_2,...,x_n)$ e $v=(y_1, y_2,..., y_n)$, define o produto interno no R^n.

Exercícios resolvidos:

1) Em relação ao produto interno usual do R^2, calcular u.v , sendo dados:

a) $u=(-3,4)$ e $v=(5,-2)$
b) $u=(6,-1)$ e $v=(1/2,-4)$
c) $u=(2,3)$ e $v=(0,0)$

Resolução:

a) u.v=(-3).5 +4.(-2) = -15-8=-23
b) u.v=6.(1/2) +(-1).(-4)=3+4=7
c) u.v=2.0+3.0=0+0=0
Para os mesmos vetores do exercício anterior, calcular u.v em relação ao produto interno $u.v=3x_1x_2+4y_1y_2$.

Resolução:

a) u.v=3(-3)(5)+4.4(-2)=-45-32=-77
b) (u.v=3.6.() +4.(-1).(-4)=9+16=25
c) u.v=3.2.0+4.3.0=0+0=0

3) Consideremos o R^3 munido do produto interno usual, sendo $v_1=(1,2,-3)$, $v_2=(3,-1,-1)$ e $v_3=(2,-2,0)$ de R^3, determinar o vetor u, tal que u. $v_1=4$, u. $v_2=6$ e u. $v_3=2$.

Resolução:

Seja u=(x,y,z), então:

(x,y,z).(1,2,-3)=4
(x,y,z).(3,-1,-1)=6
(x,y,z).(2,-2,0)=2

Efetuando os produtos internos indicados, resulta o sistema:

$$\begin{cases} x+2y-3z=4 \\ 3x-y-z=6 \\ 2x-2y=2 \end{cases}$$

cuja solução é x=3 , y=2 e z=1

Logo, o vetor procurado é v=(3,2,1)

4) No espaço , a função que associa a cada par de vetores u=(,) e v=(,), o número real (u,v)=3 + 4 é um produto interno?

Resolução:

Seja $(u,v)=3x_1x_2 + 4y_1y_2 = [\, x_1 \;\; y_1 \,]\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$

Onde A tem o termo $a_{11}=3 > 1$, o determinante igual a 12 e a matriz é simétrica.

Logo, de fato é um produto interno.

INDICAÇÃO DE LEITURA COMPLEMENTAR

POOLE, David. **Álgebra linear.** São Paulo: Cengage Learning, 2003.

STRANG, Gilbert. **Álgebra linear e suas aplicações**. São Paulo: Cengage Learning, 2010.

PARA REFLETIR

Alguns autores utilizam a representação de produto interno u.v ou (u.v) na efetivação de suas resoluções. O produto interno no espaço vetorial é sempre uma função matemática?

RESUMO

Neste tema dotamos o aluno dos conceitos básicos de transformações lineares, dependência linear, base e dimensão e produto interno no espaço vetorial.

Referências

KOLMAN, Bernard; HILL, David R. **Introdução à álgebra linear com aplicações**. 8. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2006.

BOLDRINI, José Luiz. **Álgebra linear**. São Paulo: Harbra, 2006.

POOLE, David. **Álgebra linear**. São Paulo: Cengage Learning, 2003.

STRANG, Gilbert. **Álgebra linear e suas aplicações**. São Paulo: Cengage Learning, 2010.